



А. Н. Васильев

*К*лассическая электродинамика Краткий курс лекций



А. Н. Васильев

Классическая электродинамика

Краткий курс лекций

Допущено Научно-методическим советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов университетов и технических вузов

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»

2010

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
В19

Васильев А. Н.

В19 Классическая электродинамика. Краткий курс лекций: учеб. пособие. — 2-е изд., стереотипное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 288 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0343-3

Книга представляет собой курс лекций по классической электродинамике, который читался автором на протяжении многих лет в бакалавриате физического факультета Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета. Основу курса составляют фундаментальные принципы, такие как уравнения Максвелла и принцип относительности, объединенные в релятивистской ковариантной форме уравнений электродинамики. На их базе последовательно излагаются основные идеи и методы электростатики, теории излучения, электродинамики сплошных сред и теории волноводов. Материал представлен с высокой степенью математической строгости, которая органично соединяется с ясным изложением физического содержания. Книга может быть полезна всем, кто, имея элементарные знания в области электрических явлений и математического анализа, хотел бы получить ясное и математически строгое представление, как о теоретических основах, так и о методах решения самых сложных задач электродинамики.

Для студентов университетов и технических вузов

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Евгений Рыбаков</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Корректор	<i>Зинаида Дмитриева</i>
Дизайн серии	<i>Ирины Тачиной</i>
Оформление обложки	<i>Елены Беляевой</i>
Фото	<i>Кирилла Сергеева</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24 07 00 Подписано в печать 30 10 09

Формат 70х100^{1/16} Печать офсетная Усл печ л 23,22

Тираж 1500 экз Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77 99 60 953 Д 005770 05 09 от 26 05 2009 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0343-3

© Васильев А. Н., 2009
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2009

Оглавление

Об авторе	6
О книге	9
Предисловие	12
1 Общее введение	14
1.1 Уравнения Максвелла	14
1.2 Математическое отступление: соглашения об обозначениях, справочные формулы	16
1.3 Интегральная форма уравнений Максвелла	22
1.4 Соотношение между дифференциальной и интегральной формами уравнений Максвелла при наличии поверхностей разрыва. Краевые условия (условия сшивания)	24
1.5 Уравнение непрерывности, закон сохранения заряда	28
1.6 Переход от напряженностей к потенциалам. Уравнения Максвелла для потенциалов	29
1.7 Калибровочные преобразования и калибровочные условия	31
2 Релятивистски-ковариантная формулировка электродинамики	35
2.1 Обозначения	36
2.2 Тензоры на группе вращений SO_3 и на группе O_3	36
2.3 Тензорные поля	42
2.4 Электродинамика и принцип относительности	45
2.5 Преобразования Лоренца, общие свойства	49
2.6 Собственные преобразования Лоренца. Явный вид преобразований перехода к движущейся системе отсчета	57

2.7	Релятивистский закон сложения скоростей. Сокращение масштабов и растяжение времени	62
2.8	Тензоры и тензорные поля на группе Лоренца	66
2.9	Тензорная природа потенциалов и напряженностей	74
2.10	Ковариантная формулировка уравнений Максвелла для потенциалов	78
2.11	Поперечность K , уравнение непрерывности, калибровочная инвариантность уравнений Максвелла, калибровочные условия	80
2.12	Общие соображения о виде уравнений Максвелла для потенциалов	81
2.13	Ковариантная запись уравнений Максвелла для напряженностей	83
2.14	Преобразования потенциалов и напряженностей при переходе к движущейся системе отсчета	87
2.15	Электродинамика с позиций теоретической механики. Функционал действия для электромагнитного поля	91
2.16	Тензор энергии-импульса. Законы сохранения энергии и импульса	97
2.17	Элементы релятивистской динамики точечной частицы. Сила Лоренца	105
3	Статика	118
3.1	Основные соотношения	118
3.2	Решение уравнения Пуассона	120
3.3	Мультипольное разложение скалярного потенциала φ в электростатике. Мультипольные моменты и их свойства	122
3.4	Мультипольное разложение векторного потенциала $\vec{A}$ в магнитостатике. Магнитный момент произвольной системы токов	133
3.5	Силы и моменты сил, действующие на распределенные источники	138
3.6	Потенциальная энергия системы зарядов или токов в заданном внешнем поле	142
3.7	Собственная потенциальная энергия системы зарядов или токов (энергия в собственном поле)	149
3.8	Диэлектрики и магнетики (статика)	153

3.9	Основы термодинамики диэлектриков и магнетиков. Объемные силы в диэлектриках и магнетиках	163
3.10	Краевые задачи электростатики и методы их решения	181
4	Динамика	198
4.1	Постановка задачи, общий вид решения	198
4.2	Запаздывающая функция Грина волнового оператора	203
4.3	Запаздывающие потенциалы	212
4.4	Поле произвольным образом движущегося точечного заряда. Потенциалы Льенара — Вихерта. Мощность излучения и диаграмма направленности	214
4.5	Излучение локализованных источников, мультипольное разложение	226
4.6	Линейная антенна с центральным возбуждением	240
4.7	Динамические уравнения Максвелла в среде	246
4.8	Волноводы	253
	Литература	272
	Предметный указатель	273

Об авторе

Александр Николаевич Васильев (1.09.1940–10.10.2006) — профессор физического факультета Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета — принадлежал к поколению преподавателей университета, которое сформировалось, когда во всем мире уделялось большое внимание развитию точных наук, и не утратило характерный для тех лет исследовательский и педагогический энтузиазм.

А. Н. Васильев родился в 1940 г. в Пскове. Там же он окончил с золотой медалью среднюю школу. После этого поступил на физический факультет ЛГУ, с которым с тех пор оказалась связана вся его дальнейшая жизнь.

До конца своих дней Александр Николаевич уделял много времени непосредственному общению со студентами, так же как это было и в 1960-е годы, когда он, молодой сотрудник кафедры теории поля, только начинал свою преподавательскую деятельность. Он читал важнейшие курсы лекций по теоретической физике — те курсы, на которых у будущих исследователей формируются основы физической картины мира, — и делал это с большим педагогическим мастерством. На его лекциях, даже когда они проходили в самых больших аудиториях, часто было непросто найти свободное место — он пользовался огромным авторитетом у студентов. На многократно проводившихся опросах они называли его одним из лучших преподавателей физического факультета, а Ученый совет СПбГУ награждал его почетной премией “За педагогическое мастерство”. Лекции Александра Николаевича всегда отличались простотой и ясностью изложения самых сложных концепций. В этом проявлялся особый стиль его мышления, который способствовал формированию столь необходимого для физика-исследователя навыка видеть простую суть в сложном явлении. Годы работы А. Н. Васильева в университете характеризовались небывалыми темпами развития теоретической физики, требовалось постоянное совершенствование курсов лекций, чтобы в доступной для студентов

форме рассказать о новейших достижениях в данной области. Александр Николаевич всегда успешно справлялся с этой весьма непростой задачей.

Как минимум половина из выпускников физического факультета за последние 40 лет общались с А. Н. Васильевым как с преподавателем, слушали его лекции, сдавали ему экзамены или зачеты. Для многих из них это дало возможность не только приобрести глубокие профессиональные знания, но и приобщиться к лучшим традициям Ленинградского — Санкт-Петербургского университета.

Замечательный педагог, Александр Николаевич, обладал уникальным талантом ученого. Его научные исследования были таким же важным делом в его жизни, как и преподавание, и они были неразрывно связаны между собой. Научные интересы Александра Николаевича были необычайно широки и разнообразны. Уже в самом начале научной карьеры он добился успеха в сложной области теоретической физики — конструктивной квантовой теории поля. Полученные им результаты были отмечены в 1972 г. премией Ленинского комсомола. В то время это была самая престижная государственная премия для молодых исследователей, которая присуждалась за наиболее важные научные достижения.

А. Н. Васильев пользовался заслуженным международным признанием как специалист по конструктивной теории поля, когда он решил не ограничиваться этой проблематикой и расширить область своих исследований. Вместе со своими учениками он занялся разработкой функциональных методов квантовой теории поля и статистической физики. Так возникла “Школа Васильева”, в которой формировались высококвалифицированные научные работники и преподаватели. В настоящее время среди учеников Александра Николаевича 9 докторов и свыше 20 кандидатов наук, которые успешно развивают идеи своего учителя. Многие из них уже создали собственные научные направления и имеют своих учеников. Результаты, полученные А. Н. Васильевым и его учениками, дали возможность выявить глубокое внутреннее единство классических и квантовых сложных систем с большим числом степеней свободы. Они позволяют, в частности, применять общий математический формализм для теоретического исследования физических явлений, имеющих совершенно разную природу.

Наибольший интерес у Александра Николаевича в последние годы проявлялся к теории критических явлений. Это одна из самых молодых и бурно развивающихся областей теоретической физики, в становление которой он, его ученики и коллеги внесли весьма существенный вклад.

В 1990-е годы А. Н. Васильев неоднократно становился лауреатом грантов Сороса и опубликовал несколько научно-популярных статей в “Соровском образовательном журнале”.

Богатый научно-педагогический опыт, накопленный А. Н. Васильевым за многие годы, нашел свое отражение в книгах: “Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике” (издательство Ленинградского университета, 1976; перевод на английский язык: Vasil’ev A. N. Functional methods in quantum field theory and statistics. London: Gordon & Breach, 1998), “Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике” (издательство Петербургского института ядерной физики, 1998; перевод на английский язык: Vasil’ev A. N. The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004).

О книге

Данная книга профессора А. Н. Васильева посвящена разделу физики, давно уже ставшему классическим, — электродинамике. Наряду с классической и квантовой механикой электродинамика является неотъемлемой частью образования современных физиков и инженеров, а ее глубокое понимание необходимо для успешного усвоения более специальных дисциплин, таких как физика плазмы, радиофизика, магнитная гидродинамика, физика и техника ускорителей, квантовая теория поля и многих других. По этому предмету опубликован целый ряд учебников (наиболее известные из них — “Классическая электродинамика” Дж. Джексона и “Теория поля” Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица), но книга А. Н. Васильева обладает рядом особенностей, делающих ее уникальной, и она несомненно займет свое особое место среди других монографий.

По существу, данная книга — полный и подробный конспект лекций, читавшихся автором на протяжении трех десятилетий для студентов третьего курса физического факультета ЛГУ (СПбГУ) в качестве части курса теоретической физики. Это в значительной степени определяет объем, структуру и стиль изложения, а также уровень требований, предъявляемых к читателю. Книга рассчитана на тех, кто имеет предварительные знания в области электричества и магнетизма, а также математического анализа (в пределах первых двух курсов физического или инженерно-технического вуза), но хотел бы получить более полное и систематическое представление как о теоретических основах, так и о математических методах классической электродинамики.

Особенностью книги является принятый в ней аксиоматический подход: сначала постулируются основные уравнения электродинамики (уравнения Максвелла в дифференциальной форме), а затем основные результаты выводятся из них как следствия (при минимальных дополнительных предположениях, которые всегда четко формулируются). Такое представ-

ление материала является наиболее последовательным и экономичным, так как оно позволяет быстро подвести читателя к постановке более сложных проблем, выходящих уже за рамки краткого курса, и дать методы их решения. В то же время, аксиоматический подход с самого начала подчеркивает единую природу электрических и магнитных явлений, которые в курсах общей физики, как правило, изучаются отдельно. Так как книга задумана как часть курса теоретической физики, основное внимание в ней уделяется принципиальным проблемам электродинамики, хотя текст содержит также ряд важных приложений общей теории.

Книгу можно разделить на четыре основные части.

В первой, вводной, части формулируются основные уравнения электродинамики, обсуждается соотношение между их дифференциальной и интегральной формами, строятся потенциалы электромагнитного поля, изучаются калибровочные преобразования и соответствующие им дополнительные условия, выводятся фундаментальные следствия типа закона сохранения электрического заряда.

Вторая часть посвящена релятивистски-ковариантной формулировке электродинамики на языке преобразований Лоренца. Основная идея автора здесь — показать, как просто и естественно представляются основные соотношения электродинамики в релятивистской форме. Это важно как для физиков-экспериментаторов, для которых изучение электродинамики дает уникальную возможность познакомиться с общими принципами теории относительности и ее конкретными приложениями, так и для теоретиков, для которых электродинамика может служить прообразом современных калибровочных теорий поля, описывающих фундаментальные взаимодействия элементарных частиц.

Третья часть посвящена в основном электро- и магнитостатике. Решение соответствующих задач приведено в явном виде. При этом вводятся важные понятия (например, мультипольное разложение и мультипольные моменты), которые впоследствии существенно используются при обсуждении задач динамики.

Четвертая часть посвящена собственно динамике. Она включает обсуждение таких проблем, как общее решение волнового уравнения, излучение произвольно движущихся зарядов, излучение локализованных источников (общие выражения, дипольное и квадрупольное приближения, теория аитейн). Заключительная часть содержит краткое, но ясное и информативное введение в теорию распространения электромагнитных волн

в волноводах. Физик-экспериментатор и инженер найдут здесь для себя много интересных приложений общей теории.

Важной чертой книги является замкнутость изложения: необходимые сведения из математики и других разделов физики кратко излагаются в пужных местах. Это, папример, элементы векторного анализа, аппарат тензоров на группе вращений, определение и свойства дельта-функции Дирака, элементы теоретической механики (гамильтониан, лагранжиан и принцип наименьшего действия).

Александр Николаевич Васильев — выдающийся физик-теоретик и уникальный педагог, неоднократно признававшийся студентами лучшим лектором физического факультета ЛГУ (СПбГУ), работал над данной книгой много лет и закончил ее незадолго до своей скоропостижной кончины в октябре 2006 г. Поэтому книга, сохраняющая неповторимый авторский стиль, свойственный его лекциям, в то же время представляет предмет в наиболее полном и завершенном виде.

Публикация книги позволит ознакомиться с классической электродинамикой в прекрасном изложении автора максимально широкому кругу читателей — не только студентам и аспирантам, но и профессионально работающим физикам и инженерам.

*Директор отделения теоретической физики
Петербургского института ядерной физики
член-корреспондент РАН Л. Н. Липатов*

Предисловие

Этот текст является фактически просто полным конспектом курса лекций по классической электродинамике, читаемых автором на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. Лекции читаются для всех студентов третьего курса в течение одного (осеннего) семестра по “две пары”, т. е. четыре академических часа в неделю. Этим определяется объем материала и его отбор: задача курса — дать общее представление об основных принципах теории на таком уровне и в таком объеме, которые могли бы позволить усвоившему этот материал читателю в дальнейшем разбираться самостоятельно с различными конкретными задачами.

По объему предлагаемый материал соответствует курсу, который действительно можно прочитать (и читается автором) за один семестр, конечно, с небольшими вариациями, зависящими от скорости чтения и от числа теряемых на праздники, коллоквиумы и т. п. лекций. В некоторые годы я успевал прочитать последний раздел “Волноводы”, в иные — не успевал.

Второй важный момент — контингент слушателей. В предисловии классической книги Джексона [1] говорится, что это “двухсеместровый курс для аспирантов”. В отличие от этого, данный курс лекций предназначен для более молодых и менее подготовленных слушателей — студентов третьего года обучения физического факультета (это их пятый семестр), причем для всех, а не только для будущих аспирантов. Конечно, это влияет как на отбор материала, так и на стиль его изложения.

В этих лекциях принят “аксиоматический подход”: сначала в качестве постулатов формулируются дифференциальные уравнения Максвелла для полей в вакууме, все прочее выводится затем из них как следствия, что и определяет порядок изложения. Например, в рамках логики данного курса вывести элементарную формулу $\vec{F} = Q\vec{E}$ для действующей на заряд Q в поле $\vec{E}$ силы $\vec{F}$ можно лишь после довольно большой предварительной

подготовки, хотя обычно эта формула приводится сразу же как определение напряженности электрического поля $\vec{E}$. По тем же причинам вывод нестационарных уравнений Максвелла в среде (диэлектрики и магнетики) приводится лишь в конце курса после анализа мультипольных разложений для динамических полей в вакууме, — такой порядок однозначно определяется внутренней логикой данного курса.

Сознательно ограничивая тематику, я стремился сделать изложение основных положений максимально ясным и доступным для всех желающих, допуская при этом, что не все слушатели хорошо помнят уже пройденный ими ранее на других курсах материал. Поэтому в тексте всегда приводятся все нужные для его понимания справочные сведения, в частности, основные определения и формулы векторного анализа. В тех разделах, в которых электродинамика соприкасается с теоретической механикой или с термодинамикой, в качестве введения приводится краткая сводка нужных для дальнейшего основных положений этих смежных дисциплин. Все это важно и для согласования обозначений, которым я уделял особое внимание, стремясь сделать их как можно более ясными и компактными. Я придерживаюсь той точки зрения, что “удачные обозначения — половина дела”.

Курс разбит на четыре главы (см. “Оглавление”). Относительно большая по объему, вторая глава посвящена релятивистски-ковариантной формулировке электродинамики на языке специальной теории относительности. Математическим аппаратом этой теории является язык тензоров на группе Лоренца. Поскольку его нельзя считать общеизвестным для третьекурсников, все нужные определения и сведения приводятся в тексте, что составляет довольно большое “математическое отступление”. Общая цель этой главы состоит в том, чтобы показать, как просто и красиво формулируются основные соотношения электродинамики на таком языке. Это особенно важно для будущих физиков — экспериментаторов, для которых курс электродинамики предоставляет уникальную возможность достаточно подробно ознакомиться с общими принципами теории относительности и их конкретными приложениями.

В заключение поясним порядок ссылок в тексте. Каждая из его четырех частей состоит из нумерованных разделов (“пунктов”), ссылка типа “п. 2.3” обозначает раздел 3 главы 2, и т. п. Нумерация формул по всему тексту сплошная, поэтому при ссылках указывается только номер формулы без уточнения номеров главы и раздела. Всюду используется гауссова система единиц.

Глава 1

Общее введение

1.1 Уравнения Максвелла

Классическая электродинамика представляет собой один из разделов теоретической физики, который в настоящее время можно считать полностью законченным. Поэтому ее можно излагать аксиоматически, постулировав без вывода основные уравнения и выводя из них все остальное как следствия. Именно так и будет строиться изложение в данном курсе лекций.

Мы принимаем в качестве постулата следующие четыре уравнения Максвелла (1865 г.) — это дифференциальные уравнения в частных производных, связывающие напряженности электрического E и магнитного H полей с “источниками” — объемными плотностями заряда ρ и тока j :

$$\operatorname{div} H = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \partial_t H = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} H - \frac{1}{c} \partial_t E = \frac{4\pi}{c} j. \quad (4)$$

Это уравнения для электромагнитного поля в вакууме, записанные в так называемой “гауссовой системе единиц”, наиболее удобной для записи общих соотношений, — она и будет использоваться всюду в этом курсе. Константа “ c ” в уравнениях — скорость света в вакууме (триста тысяч километров в секунду), $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ — частная производная по времени t ,

определения координатных дифференциальных операций “div” и “rot” напоминаются пиже. Обычная постановка задачи такова: источники ρ и j даны, напряженности E и H ищутся.

О терминологии: уравнение (3) есть дифференциальная форма закона Кулона, (1) — его магнитный аналог, (2) — дифференциальная форма закона электромагнитной индукции Фарадея, уравнение (4) без второго вклада в левой части — закон Ампера.

Историческая справка: формально единственным вкладом Максвелла в уравнения электродинамики была добавка второго слагаемого в левую часть уравнения (4). После переноса в правую часть она выглядит как добавка к плотности тока и ее называют “током смещения Максвелла”. Эта добавка играет очень важную роль: она позволила Максвеллу истолковать систему (1)–(4) как уравнения распространения упругих колебаний (т. е. уже хорошо знакомый физикам того времени процесс) некоторой абстрактной сплошной среды, названной им “эфиром”. Впоследствии теория относительности (которая будет подробно обсуждаться в дальнейшем) позволила избавиться от понятия эфира.

О размерностях: исходя из общего принципа, согласно которому все слагаемые в каждом выражении и обе части равенства в любом уравнении должны иметь одинаковую размерность, можно выразить размерности всех входящих в уравнения (1)–(4) величин через размерности фундаментальных величин — заряда (Q), длины (L) и времени (T), отталкиваясь от известной размерности объемной плотности заряда $\rho \propto Q/L^3$ (заряд/объем) и скорости света $c \propto L/T$ (длина/время). Приравнявая размерности вкладов в уравнениях (2)–(4) с учетом $\text{div} \propto \text{rot} \propto 1/L$ для этих операций (см. ниже) и $\partial_t \propto 1/T$, получим $E/L \propto (T/L)(H/T)$ из (2), $(E/L) \propto \rho \propto Q/L^3$ из (3) и $H/L \propto (T/L)(E/T) \propto j(T/L)$ из (4). Отсюда следует, что по размерности

$$E \propto H \propto Q/L^2, \quad \rho \propto Q/L^3, \quad j \propto Q/TL^2. \quad (5)$$

Таковы размерности всех величин в гауссовой системе единиц, в которой записаны уравнения. Из (5) следует, что в этой системе размерности напряженностей E и H одинаковы.

Нужно также отметить, что традиционный термин “объемная плотность тока” не вполне корректен и может вести к недоразумениям. Обычно под объемной плотностью некоторой величины понимается “количество данной величины в единице объема”, такой смысл имеет, в частности, объемная плотность заряда ρ . Но под “величиной тока” естественно понимать

то, что измеряется поставленным в проводе амперметром, — количество заряда, проходящее через сечение провода за единицу времени, т. е. то, что измеряется в амперах. Такой смысл имеет произведение j не на объем (как следовало бы из формального смысла термина), а на площадь: по смыслу j есть вектор, направление которого показывает направление “размазанного” по объему тока, а его абсолютная величина есть количество заряда, проходящего за единицу времени через поставленную поперечно направлению тока площадку единичного сечения.

1.2 Математическое отступление: соглашения об обозначениях, справочные формулы

Тройку координат трехмерного пространства мы будем в дальнейшем обозначать одной буквой, например, x , понимая x как трехмерный вектор с компонентами x_i , $i = 1, 2, 3$. Это значит, что для нумерации осей трехмерного пространства принимаются цифровые обозначения 1, 2, 3, а не буквенные x, y, z , которые часто используются в школьных курсах, но очень неудобны при записи сложных выражений, с которыми нам придется иметь дело в дальнейшем.

Соглашение: частные производные по пространственным координатам x_i будем обозначать сокращенно через ∂_i , т. е. $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$.

Соглашение: для индексов, нумерующих пространственные координаты, всегда будут использоваться латинские буквы типа $i, k, l, \dots$. Каждый из таких индексов может принимать любое из цифровых значений 1, 2, 3, поэтому объект, содержащий n латинских индексов, имеет 3^n компонент, получаемых присвоением каждому из индексов конкретного цифрового значения 1, 2 или 3. Например, величина типа A_{ik} имеет 9 компонент, величина типа A_{ikl} — 27 компонент, и так далее.

Определение тензоров δ_{ik} и ε_{ikl} . В формулах будут часто встречаться два фундаментальных тензора (точный смысл термина “тензор” пояснится впоследствии), а именно, *символ Кронекера* δ_{ik} , компоненты которого равны единице при $i = k$ и нулю при $i \neq k$, т. е.

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}$$

и трехзначковый символ ε_{ikl} , компоненты которого определяются следующими двумя требованиями:

1) ε_{ikl} полностью антисимметричен, т. е. его компоненты меняют знак при перестановке любых двух соседних индексов;

2) компонента ε_{123} равна единице.

Покажем, что эти два требования определяют ε_{ikl} однозначно. Трехзначковый объект ε_{ikl} имеет $3^3 = 27$ компонент (см. выше), но большинство из них равны нулю вследствие требуемой антисимметрии. Действительно, если какая-нибудь конкретная компонента имеет два одинаковых цифровых индекса, то она должна быть равной нулю. [Пример: компонента ε_{112} , с одной стороны, не изменяется при перестановке двух первых значков ввиду их равенства, с другой — должна при этом менять знак по свойству антисимметрии, откуда следует $\varepsilon_{112} = 0$. Если совпадающие значки не соседние, например ε_{121} , то вывод не изменяется, так как из той же антисимметрии следует $\varepsilon_{121} = -\varepsilon_{112} = 0$.]

Таким образом, отличными от нуля могут быть лишь те компоненты ε_{ikl} , у которых все три индекса имеют разные цифровые значения. Поскольку каждый из индексов может принимать лишь три возможных значения 1, 2, 3, ясно, что один из этих трех индексов обязательно должен быть равен 1, второй — 2, третий — 3. Очевидно, что все такие наборы получаются перестановками тройки 1, 2, 3. Таких перестановок всего $3! = 6$, а именно три “циклических” (123, 231, 312) и три “антициклических” (213, 132, 321). Поскольку все отличные от нуля компоненты ε_{ikl} получаются из одной перестановкой индексов, для полного задания ε_{ikl} достаточно задать всего лишь одну ненулевую компоненту, что мы и сделали (см. выше): $\varepsilon_{123} = 1$. Тогда для четных (циклических) перестановок имеем $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, а для нечетных (антициклических) $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$, все прочие компоненты ε_{ikl} равны нулю.

Соглашение: если в формуле некоторый значок повторяется дважды, то по нему подразумевается суммирование по всем его возможным значениям, в нашем случае трехмерного пространства, — по 1, 2, 3. Например,

$$A_i B_i = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = (AB)$$

— скалярное произведение векторов A и B . *Замечание:* поскольку значение суммы не зависит, очевидно, от обозначения индекса суммирования, его можно произвольно изменять, например, $A_i B_i = A_k B_k$ и т. п.

Но в многократных суммах следует следить за тем, чтобы для каждого из суммирований использовался отличный от всех других индекс. Например, для произведения двух скалярных произведений типа $(AB)(CD)$ можно использовать запись $A_i B_i C_k D_k$, но ни в коем случае нельзя писать $A_i B_i C_i D_i$ — такое выражение при наших соглашениях не имеет смысла.

Формальное правило: любой из индексов типа $i, k, l, \dots$ в любом из выражений может встречаться либо один раз (тогда его называют “свободным” и он может принимать любое конкретное цифровое значение 1, 2, 3), либо два раза (и тогда это “индекс суммирования”, который можно произвольно менять, в отличие от свободного индекса). При записи формул нужно тщательно следить за тем, чтобы для всех индексов суммирования использовались буквы, отличные от уже имеющихся свободных индексов, и чтобы для разных (многократных) суммирований использовались разные (неважно какие, но обязательно разные и отличные от свободных) буквенные индексы.

Если в выражении присутствует символ δ с каким-нибудь индексом суммирования, то выражение упрощается, так как “каждый символ δ снимает одно суммирование”. Например, $A_i \delta_{ik} = A_k$, $A_i B_k \delta_{ik} = A_i B_i = A_k B_k$ и т. п.

Векторное произведение $[A \times B]$ двух векторов A и B есть новый вектор, компоненты которого определяются соотношениями

$$[A \times B]_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2,$$

$$[A \times B]_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3,$$

$$[A \times B]_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

(отметим, что второе и третье соотношения получаются из первого циклическими перестановками). С помощью введенного выше символа ε все эти три соотношения можно записать в виде одной формулы (по повторяющимся индексам k, l суммирование):

$$[A \times B]_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l.$$

Формулы свертки двух ε . Приведем без вывода следующие очень полезные соотношения: свертка двух ε по одному, по двум значкам

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{sml} &= \delta_{is}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ks}, \\ \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{skl} &= 2\delta_{is},\end{aligned}$$

по трем $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6$ (эту формулу приводим только для полноты, и практически важны лишь две первые). Выше мы привели каноническую запись, в которой индексы суммирования (l в первой формуле и k, l во второй) занимают одинаковое положение в двух множителях ε . Но их, конечно, можно переставлять, учитывая антисимметрию ε .

При практическом использовании подобных формул конкретные обозначения индексов ε могут быть любыми, поэтому запоминать нужно не явный вид написанных выше выражений, а общий принцип их построения. При каноническом (т. е. одинаковом для двух множителей ε) положении индексов суммирования этот принцип для второй формулы очень прост: ответ есть удвоенный δ -символ по двум остающимся свободным индексам. В первой формуле у каждого множителя ε остаются два свободных индекса и для канонического (одинакового) положения индекса суммирования расстановка индексов в комбинации $\delta \times \delta - \delta \times \delta$ в правой части определяется следующим простым правилом:

$$[\text{первый, первый}][\text{второй, второй}] - [\text{первый, второй}][\text{второй, первый}].$$

Термины “первый, второй” обозначают, соответственно, первый и второй из остающихся в каждом символе ε свободных индексов. В приведенной выше записи такими индексами у первого множителя ε являются i, k , а у второго — s, m , поэтому $[\text{первый, первый}][\text{второй, второй}] = is, km$, а $[\text{первый, второй}][\text{второй, первый}] = im, ks$.

Знание формул свертки двух ε избавляет от необходимости запоминать множество различных формул векторного анализа. В качестве примера приведем вывод известной формулы “БАЦ—ЦАБ”: $[A \times [B \times C]] = B(AC) - C(AB)$. Из приведенных выше формул для “ i -компоненты” исходного объекта получаем:

$$\begin{aligned}[A \times [B \times C]]_i &= \varepsilon_{ikl}A_k[B \times C]_l = \varepsilon_{ikl}A_k\varepsilon_{lsm}B_sC_m = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{sml}A_kB_sC_m = \\ &= (\delta_{is}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ks})A_kB_sC_m = A_kB_iC_k - A_kB_kC_i \\ &= B_i(AC) - C_i(AB),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Основные понятия векторного анализа. Сейчас речь пойдет об объектах, зависящих от пространственных координат $x = \{x_i, i = 1, 2, 3\}$, напомним обозначение $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$.

1. *Градиент* $\nabla\varphi$ скаляра φ есть вектор с компонентами

$$(\nabla\varphi)_i = \partial_i\varphi.$$

2. *Дивергенция* $\operatorname{div} A$ вектора A есть скаляр

$$\operatorname{div} A = \partial_i A_i.$$

3. *Ротор* вектора A есть вектор $\operatorname{rot} A$ с компонентами

$$(\operatorname{rot} A)_i = \varepsilon_{ikl} \partial_k A_l.$$

В соответствии с нашим соглашением, везде подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

В формулах будет также часто встречаться *оператор Лапласа*

$$\Delta \equiv \partial_i \partial_i$$

— сумма вторых производных по всем координатам.

Известные соотношения $\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0$, $\operatorname{rot} \nabla\varphi = 0$ на нашем языке — следствия антисимметрии ε . Например,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} A = \partial_i (\operatorname{rot} A)_i = \partial_i \varepsilon_{ikl} \partial_k A_l = \varepsilon_{ikl} \partial_i \partial_k A_l = 0$$

как свертка симметричного по индексам i, k объекта $\partial_i \partial_k$ с антисимметричным по этим индексам символом ε_{ikl} .

Общее правило: свертка симметричного по любой паре индексов объекта с антисимметричным равна нулю.

Действительно, пусть объект $A_{ik\dots}$ симметричен по ik (многоточие — любые другие индексы при их паличии), а $B_{ik\dots}$ — антисимметричен (т. е. $A_{ik\dots} = A_{ki\dots}$ и $B_{ik\dots} = -B_{ki\dots}$ с сохранением положения всех обозначаемых многоточием других индексов). Тогда $A_{ik\dots} B_{ik\dots} = 0$. Для доказательства достаточно переставить мысленно индексы суммирования i, k . При такой перестановке, с одной стороны, ответ не должен изменяться, так как он не зависит от обозначения индексов суммирования, с другой стороны, он должен изменить знак в силу предполагаемых свойств симметрии A и B . Поэтому “объект равен минус себе”, следовательно, равен нулю.

В дальнейшем мы будем часто использовать это правило, говоря коротко “свертка симметричного с антисимметричным по такой-то паре индексов”. Равенство $\operatorname{rot} \nabla \varphi = 0$ доказывается точно такими же соображениями.

Знание формул свертки двух ε помогает при выводе различных справочных формул векторного анализа. В качестве примера выведем известное равенство $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \nabla \operatorname{div} A - \Delta A$, в котором $\Delta = \partial_i \partial_i$ — оператор Лапласа. Имеем: $(\operatorname{rot} \operatorname{rot} A)_i = \varepsilon_{ikl} \partial_k (\operatorname{rot} A)_l = \varepsilon_{ikl} \partial_k \varepsilon_{lsm} \partial_s A_m = (\delta_{is} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{ks}) \partial_k \partial_s A_m = \partial_i \partial_k A_k - \partial_k \partial_k A_i \equiv \partial_i \operatorname{div} A - \Delta A_i$, что и требовалось доказать.

Поток и циркуляция. Поток вектора A через некоторую (замкнутую или незамкнутую) поверхность S с заданным направлением нормали к ней есть поверхностный интеграл $\iint A_n ds$, дифференциалом которого является произведение площади ds участка поверхности на величину нормальной проекции A_n значения вектора A на данном участке.

Теорема Остроградского — Гаусса:

$$\int_V dx \operatorname{div} A = \iint_C A_n ds,$$

где V — произвольный объем, $dx \equiv dx_1 dx_2 dx_3$ — дифференциал объема, S — замкнутая поверхность, ограничивающая данный объем, нормаль внешняя. Словесно: объемный интеграл от дивергенции любого вектора равен потоку этого вектора наружу через поверхность, ограничивающую данный объем.

Циркуляцией вектора A по некоторому замкнутому контуру C в заданном направлении обхода называют контурный интеграл $\int dx_i A_i$, дифференциалом которого является скалярное произведение вектора A_i на данииом участке на соответствующий вектор dx_i , направленный по касательной к контуру в заданном направлении и равный по модулю длине рассматриваемого бесконечно малого участка.

Теорема Стокса:

$$\iint_S (\operatorname{rot} A)_n ds = \int_C dx_i A_i,$$

т. е. поток ротора любого вектора через любую незамкнутую поверхность равен циркуляции этого вектора по контуру, ограничивающему эту поверхность. При этом направление нормали к поверхности и направление

обхода контура должны быть согласованы. Правило согласования зависит от системы отсчета: если это система “правая = штопорная” (т. е. такая, в которой вращение оси “1” к оси “2” дает по “правилу штопора” нужное направление оси “3”, все прочее — циклическими перестановками), то направление обхода контура C и нормали к поверхности S согласуется обычным “правилом штопора”. Для “левой” системы — наоборот.

Закончив на этом данное “математическое отступление”, возвращаемся непосредственно к электродинамике.

1.3 Интегральная форма уравнений Максвелла

Вернемся к уравнениям Максвелла (1)–(4). Допустим, что входящие в них объемные плотности источников ρ , j и (как следствие) решения для напряженностей E , H являются гладкими, так что уравнения справедливы для любой точки пространства x . Тогда эти уравнения можно проинтегрировать либо по произвольному объему (для уравнений с div), либо по произвольной незамкнутой поверхности S , вычисляя поток ротора (для уравнений с rot). Превращая объемный интеграл от дивергенции вектора в его поток из объема, а поток ротора вектора — в его циркуляцию по ограничивающей поверхности контуру, получим следующий интегральный эквивалент дифференциальных уравнений Максвелла (1)–(4):

$$\iint H_n ds = 0, \quad (6)$$

$$\int dx_i E_i + \frac{1}{c} \partial_t \iint H_n ds = 0, \quad (7)$$

$$\iint E_n ds = 4\pi \int dx \rho \equiv 4\pi Q_v, \quad (8)$$

$$\int dx_i H_i - \frac{1}{c} \partial_t \iint E_n ds = \frac{4\pi}{c} \iint j_n ds \equiv \frac{4\pi}{c} I_s, \quad (9)$$

где Q_v — полный заряд внутри рассматриваемого объема, а I_s — полный ток, протекающий через ограниченную заданным контуром поверхность. Мы не указываем под знаками интегралов уточняющих символов типа V , S , полагая, что и так все ясно из приведенных выше формулировок теорем Остроградского — Гаусса и Стокса. Отметим, что уравнение (7) есть закон

электромагнитной индукции Фарадея, так как циркуляция вектора E по замкнутому контуру имеет смысл ЭДС, развиваемой в контуре, а из (7) следует, что эта величина пропорциональна скорости изменения магнитного потока через ограниченную контуром поверхность, в чем и состоит закон Фарадея. Отметим также, что уравнение (8) — интегральная форма закона Кулона — очень полезно в электростатике при вычислении напряженностей для простых систем, у которых плотность заряда ρ обладает определенной симметрией. В качестве простейшего примера напомним вывод известной формулы $E = Q/r^2$ для напряженности точечного заряда Q . Если поместить его в начало координат и окружить сферой произвольного радиуса r , то поток E через эту сферу находится элементарно: ввиду сферической симметрии ясно, что вектор E везде направлен по нормали к поверхности сферы и по модулю одинаков для всех ее точек, так что поток есть просто произведение $E = E_n$ на площадь сферы $4\pi r^2$. Приравняв поток величине $4\pi Q$ согласно (8), получаем $E = Q/r^2$. Направление вектора E (по нормали наружу при $Q > 0$) легко определяется из теоремы Остроградского — Гаусса. Тем же методом легко найти выражения для напряженности при любом другом сферически симметричном распределении заряда (для дальнейшего отметим важное следствие: если такой заряд “локализован”, т. е. сосредоточен в некотором конечном объеме, то вне его он создает точно такое же поле, как точечный суммарный заряд Q в центре системы). Аналогичные рассуждения позволяют легко найти напряженность E для равномерно заряженной бесконечной плоскости или системы параллельных плоскостей (в частности, для конденсатора), для равномерно заряженной бесконечной линии и т. п.

В заключение напомним, что в этом разделе мы предполагали гладкость всех величин, тогда дифференциальная и интегральная формы уравнений Максвелла полностью эквивалентны. Действительно, выше мы приводили вывод интегральной формы из дифференциальной; из математики известно, что можно выолнить и обратную процедуру, пользуясь произвольностью объемов и поверхностей и переходя к бесконечно малым величинам.

1.4 Соотношение между дифференциальной и интегральной формами уравнений Максвелла при наличии поверхностей разрыва. Краевые условия (условия сшивания)

Допустим теперь, что есть некоторая поверхность S , на которой сосредоточены поверхностные заряды и токи, а вне ее — обычные объемные распределения с гладкими ρ и j . Хорошо известно (и ниже будет доказано), что при переходе через такую поверхность напряженности E , H испытывают конечные скачки, т. е. их предельные значения при подходе к поверхности S с двух разных сторон существуют, но различны. На самой поверхности из-за разрывов производные E , H не существуют, так что дифференциальные уравнения Максвелла (1)–(4) имеют смысл только вне S с двух сторон.

В такой ситуации стандартный вывод интегральной формы уравнений Максвелла из дифференциальной справедлив лишь для тех объемов (в теореме Гаусса) или поверхностей (в теореме Стокса), которые целиком находятся с одной из двух сторон границы раздела S , не пересекая ее. Понимаемая в таком “узком смысле” интегральная форма уравнений Максвелла, естественно, полностью эквивалентна дифференциальной.

Но для математической корректности постановки задачи при наличии поверхности разрыва S дифференциальных уравнений вне S недостаточно — нужны еще определенные “краевые условия”, т. е. условия сшивания решений с двух сторон S . В чистой математике краевые условия обычно считаются некоторыми дополнительными требованиями, которые добавляются к дифференциальным уравнениям и могут быть различными (типичные примеры — задача Дирихле или задача Неймана для уравнения Лапласа с границами). В электродинамике это не так, поскольку искомые условия сшивания однозначно определяются самой физикой задачи. Они выводятся из интегральных уравнений Максвелла, понимаемых “в широком смысле”, а именно, считающихся справедливыми для любых областей интегрирования, в том числе и пересекающих границу раздела S . Такое обобщение — постулат, поскольку интегральные уравнения для таких областей нельзя получить обычным образом из дифференциальных. Интегральные уравнения “в широком смысле” содержат в себе не только

обычные дифференциальные уравнения вне поверхности S , но и условия сшивания решений на этой поверхности, в чем мы убедимся ниже. У этого постулата есть очень простое физическое обоснование: бесконечно тонкая поверхность S — идеализация, подобная понятию материальной точки в механике. В реальной жизни все “размазано”, т. е. граница раздела S должна иметь некоторую конечную толщину. Тогда все сводится к обычным объемным распределениям источников, для которых интегральная форма справедлива при любом выборе объемов или поверхностей интегрирования, в том числе и для пересекающих размазанную границу раздела. Такие соотношения должны, очевидно, сохраниться и после предельного перехода к бесконечно тонкой поверхности S (толщина границы раздела стремится к нулю, а объемные плотности источников внутри нее — к бесконечности, так что произведение этих величин стремится к некоторым постоянным, определяющим поверхностные плотности источников). Эти простые соображения и позволяют принять “расширенный вариант” интегральной формы уравнений Максвелла в качестве постулата.

Покажем теперь, как из него выводятся краевые условия. Поверхность раздела S будем предпологать гладкой, а пересекающие ее объемы в теореме Гаусса или поверхности в теореме Стокса — малыми, рассматривая затем предел их стремления к бесконечно малым. Ясно, что в таком пределе можно пренебречь кривизной поверхности, считая ее плоской, а напряженности E и H с каждой стороны границы — пространственно однородными, но при этом не одинаковыми с двух сторон (их будем различать индексами I, II). Для определенности выберем в качестве поверхности раздела плоскость 1, 2, тогда нормалью к ней будет ось 3 (см. рис. 1.1). Система отсчета на рисунке выбрана правой (= “штопорной”).

Рассмотрим сначала интегральную форму закона Кулона (8) и возьмем в качестве “объема интегрирования” показанный на рис. 1.1 пересекающий границу раздела цилиндр. Обозначим его радиус через R , высоту — h и рассмотрим предел $R \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$, причем так, что h стремится к нулю быстрее, чем R (для конкретности можно положить $h \propto R^2$). Условие $h/R \rightarrow 0$ удобно тем, что позволяет при вычислении потока вектора E учитывать лишь вклад двух “донышек” цилиндра, пропорциональный их площади $S_{\text{дон}} = \pi R^2$, пренебрегая вкладом в поток от боковой поверхности как величиной высшего порядка малости при $R \rightarrow 0$. Тогда с нужной точностью ($\propto R^2$) поток есть $S_{\text{дон}}(E_3^{II} - E_3^I)$ и должен быть равен, согласно (8), величине $4\pi Q_v$ с учетом в Q_v лишь вкладов порядка R^2 . Ясно, что вклад такого порядка может порождаться только поверхностным зарядом

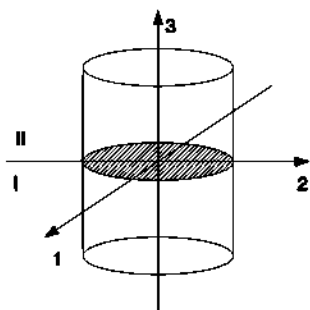


Рис. 1.1. Объем интегрирования в интегральной форме закона Кулона, уравнение (8)

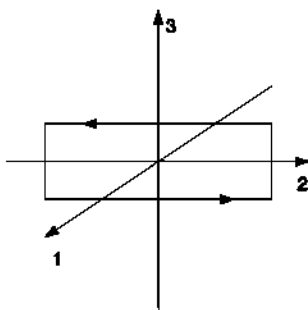


Рис. 1.2. Выбор контуров интегрирования в плоскости осей "2, 3" для использования теоремы Стокса в уравнении (9)

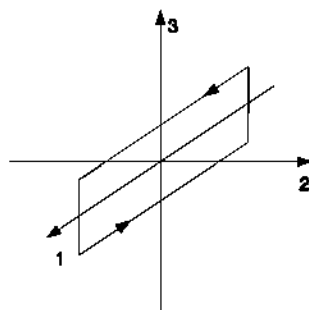


Рис. 1.3. Выбор контуров интегрирования в плоскости осей "3, 1" для использования теоремы Стокса в уравнении (9)

на границе раздела S и равен $\sigma S_{\text{дов}}$, где σ — поверхностная плотность заряда (объемный заряд с непрерывной плотностью ρ дает в Q_v несущественный вклад высшего порядка малости при $R \rightarrow 0$). Приравняв поток E и $4\pi Q_v$ и сокращая $S_{\text{дов}}$, получаем $E_3^{II} - E_3^I = 4\pi\sigma$ или $\Delta E_n = 4\pi\sigma$, где символ Δ в данном случае обозначает "прращение" = "скачок" (не путать с оператором Лапласа), а E_n — нормальную составляющую вектора E .

Ясно, что изложенные выше на примере соотношения (8) построения справедливы для любых уравнений такого типа. В частности, из (6) следует $\Delta H_n = 0$, т. е. нормальные компоненты вектора H на границе раздела непрерывны. Общий принцип, который будет в дальнейшем использоваться, состоит в следующем: всякое уравнение с дивергенцией некоторого вектора через свою интегральную форму порождает соответствующее краевое условие для скачка нормальной составляющей данного вектора.

Обратимся теперь к "роторным уравнениям" и их интегральной форме, начав с уравнения (9). Аналогом поверхностной плотности заряда σ будет теперь плотность поверхностного тока i — двумерный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности раздела S в любой ее точке. В нашем случае (см. рис. 1.2 и 1.3) это вектор в плоскости "1, 2" с компонентами $i_{1,2}$. Его модуль по смыслу есть количество заряда, протекающего за единицу времени через единицу длины линии, поставленной в плоскости раздела поперек направления вектора i .

При использовании теоремы Стокса в (9) выберем сначала контур так, как показано на рис. 1.2, а затем — как на рис. 1.3. Натянутая на такие контуры поверхность пересекает границу раздела, а указанное стрелками направление обхода контуров выбрано так, чтобы определенная по “правилу штыря” нормаль к этим поверхностям совпадала с положительным направлением ортогональной им оси (“1” для рис. 1.2 и “2” для рис. 1.3). Каждый из контуров — прямоугольник, длину его горизонтального ребра обозначим через l , а вертикального — через h , и будем рассматривать предел $l \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, причем $h/l \rightarrow 0$ (например, $h \propto l^2$), чтобы при вычислении циркуляции вектора H по контуру можно было бы не учитывать вклад вертикальных участков. Тогда циркуляция вектора H по контуру с учетом лишь вкладов порядка l есть $l(H_2^I - H_2^{II})$ для контура на рис. 1.2 и $l(H_1^{II} - H_1^I)$ для контура на рис. 1.3, а поток поверхностного тока (объемный в этом порядке по l вклада не дает) равен $i_1 l$ в первом случае и $i_2 l$ во втором.

Остается рассмотреть лишь вклад с $\partial_t E$ в уравнении (9). При естественном предположении ограниченности $|\partial_t E| < \text{const}$ очевидно, что этот вклад оценивается сверху площадью lh , натянутой на контур поверхности, и пренебрежим по сравнению с вкладами порядка l от циркуляции. Обобщением сказанного является следующее *утверждение*: слагаемые с производными напряженностей по времени не дают вкладов в краевые условия, поэтому в динамике они точно такие же, как и в статике.

Возвращаясь к уравнению (9) и подставляя в него полученные выше выражения для циркуляции вектора H и потока поверхностного тока через натянутую на контур поверхность после сокращения общего множителя l , получим $H_2^I - H_2^{II} = (4\pi/c)i_1$ для контура на рис. 1.2 и $H_1^I - H_1^{II} = -(4\pi/c)i_2$ для контура на рис. 1.3. К этому можно добавить полученное ранее условие непрерывности нормальных составляющих $H_3^I - H_3^{II} = 0$. Все эти условия вместе можно записать в виде одного векторного равенства $H^I - H^{II} = (4\pi/c)[n \times i]$, в котором n — единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный по оси “3”. Левую часть этого равенства можно обозначить через ΔH_t — скачок двумерного вектора касательных составляющих H_t вектора H : $\Delta H_t = (4\pi/c)[n \times i]$.

Все эти рассуждения обобщаются непосредственно на любые “роторные уравнения”, в частности, из уравнения (7) следует $\Delta E_t = 0$, т. е. касательные составляющие вектора E на границе раздела непрерывны.

В заключение приведем в одном месте полный набор полученных выше краевых условий, справедливых как для дипамики, так и для статики:

$$\begin{aligned}\Delta E_n &= 4\pi\sigma, & \Delta H_n &= 0, \\ \Delta E_t &= 0, & \Delta H_t &= (4\pi/c)[n \times i],\end{aligned}\tag{10}$$

где индексом “ n ” обозначаются нормальные, а индексом “ t ” — касательные (= “тангенциальные”) составляющие векторов.

1.5 Уравнение непрерывности, закон сохранения заряда

Вернемся к дифференциальным уравнениям (1)–(4). Применим операцию ∂_t к обеим частям равенства (3) и операцию “ $c \operatorname{div}$ ” к обеим частям равенства (4), затем сложим полученные таким путем соотношения. При учете равенства $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ левые части сокращаются, и в итоге получается соотношение

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} j = 0,\tag{11}$$

которое называют “уравнением непрерывности”.

Из него следует, что источники ρ , j в исходных уравнениях Максвелла не могут быть совершенно произвольными — они обязательно должны удовлетворять уравнению непрерывности (11).

Его физический смысл становится ясным, если перейти к интегральной форме с помощью теоремы Остроградского — Гаусса:

$$\partial_t \int dx \rho \equiv \partial_t Q_v = - \iint j_n ds,\tag{12}$$

где Q_v — полный заряд внутри рассматриваемого объема, а интеграл в правой части — поток вектора j наружу через ограничивающую его замкнутую поверхность.

Равенство (12) выражает закон сохранения электрического заряда: он не может ни “рождаться”, ни “исчезать”, он может только “перетекать”, т. е. заряд Q_v в любом заданном объеме V может изменяться только из-за его перетекания через внешнюю границу. Вектор j имеет смысл плотности потока заряда, а интеграл в правой части (12) — поток через внешнюю границу.

Здесь уместно отметить различие смысла терминов “сохраняется” в обычной классической механике систем с конечным числом степеней свободы и в задачах с распределенными по пространству величинами типа плотности заряда ρ в электродинамике. В первом случае термин “данная величина сохраняется” означает, что эта величина (например, энергия для консервативных систем в механике) не зависит от времени. Для распределенных по пространству величин закон сохранения всегда формулируется в виде уравнения непрерывности типа (11), в которое входит производная по времени от объемной плотности рассматриваемой величины (в (11) это заряд, но потом будут и другие примеры) и дивергенция вектора плотности потока той же величины. Если плотность потока достаточно хорошо убывает на бесконечности, так что интеграл в правой части (12) при неограниченном увеличении объема V исчезает, то “полное количество данной величины во всем пространстве” сохраняется в обычном для механики смысле, т. е. просто не зависит от времени. Но при этом “количество данной величины” в любом конечном объеме V может изменяться за счет его перетекания через границу, что и выражается уравнением непрерывности.

1.6 Переход от напряженностей к потенциалам.

Уравнения Максвелла для потенциалов

Из математики известно, что всякий вектор, дивергенция которого равна нулю, может быть представлен в виде ротора некоторого другого вектора, а вектор, ротор которого равен нулю, является градиентом некоторого скаляра. Поэтому из первого уравнения Максвелла (1) следует, что существует некоторый вектор A такой, что $H = \text{rot } A$. Подставляя это выражение для H в уравнение (2), получаем $\text{rot } E + c^{-1} \partial_t \text{rot } A = \text{rot}(E + c^{-1} \partial_t A) = 0$. Отсюда следует, что стоящая под общим знаком rot величина является градиентом некоторого скаляра, который принято обозначать через φ : $E + c^{-1} \partial_t A = -\nabla \varphi$. Функцию φ называют скалярным потенциалом, A — векторным потенциалом.

Таким образом, мы получили следующие формулы, выражающие напряженности E , H через потенциалы φ , A :

$$H = \text{rot } A, \quad E = -\nabla \varphi - c^{-1} \partial_t A. \quad (13)$$

Эти соотношения можно рассматривать как общее решение пары однородных уравнений Максвелла (1), (2): при любых потенциалах получаемые по формулам (13) напряженности будут автоматически удовлетворять уравнениям (1), (2). Отметим, что переход от напряженностей к потенциалам — явное упрощение задачи, так как в терминах напряженностей мы имели 6 неизвестных величин (компоненты двух трехмерных векторов E и H), а в терминах потенциалов — только 4 (скаляр φ и компоненты трехмерного вектора A).

Рассмотрим теперь уравнения для потенциалов, которые получаются подстановкой выражений (13) для напряженностей в неоднородные уравнения Максвелла (3), (4):

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(-\nabla\varphi - c^{-1}\partial_t A) &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} A - c^{-1}\partial_t(-\nabla\varphi - c^{-1}\partial_t A) &= (4\pi/c)j.\end{aligned}$$

Воспользовавшись известными (см. п. 1.2) равенствами $\operatorname{div} \nabla = \Delta$ и $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \nabla \operatorname{div} - \Delta$, перепишем уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned}-\Delta\varphi - c^{-1}\partial_t \operatorname{div} A &= 4\pi\rho, \\ \nabla(\operatorname{div} A + c^{-1}\partial_t\varphi) - \Delta A + c^{-2}\partial_t^2 A &= (4\pi/c)j.\end{aligned}$$

Введя обозначение

$$c^{-2}\partial_t^2 - \Delta = c^{-2}\partial_t^2 - \partial_i\partial_i \equiv \square, \quad (14)$$

можно переписать уравнения в форме

$$\begin{aligned}\square\varphi - c^{-1}\partial_t(\operatorname{div} A + c^{-1}\partial_t\varphi) &= 4\pi\rho, \\ \square A + \nabla(\operatorname{div} A + c^{-1}\partial_t\varphi) &= (4\pi/c)j,\end{aligned} \quad (15)$$

которую и будем считать окончательной.

Определенная в (14) дифференциальная операция $\square$ называется “волновым оператором” или “оператором Даламбера” (от французского *d’Alambert*), она будет играть очень важную роль в дальнейшем.

Соотношения (15) — уравнения Максвелла для потенциалов в произвольной калибровке — смысл этого термина поясняется в следующем разделе.

1.7 Калибровочные преобразования и калибровочные условия

По заданным потенциалам напряженности (13) находятся, очевидно, однозначно. Обратное неверно: если сделать преобразование потенциалов

$$A \rightarrow A' = A + \nabla\Phi, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - c^{-1}\partial_t\Phi \quad (16)$$

с произвольной функцией Φ , то напряженности (13), как нетрудно проверить, не изменятся: $H' = H$, $E' = E$. Соотношения (16) — общий вид преобразований потенциалов, не меняющих напряженностей, такие преобразования называют *калибровочными*. Связанные калибровочным преобразованием потенциалы φ , A и φ' , A' с точки зрения физики полностью эквивалентны, так как непосредственный физический смысл имеют только напряженности.

Поскольку уравнения Максвелла для потенциалов (15) выводились из уравнений (3), (4) для напряженностей, ясно, что они должны быть калибровочно-инвариантными в следующем смысле: если некоторые потенциалы φ , A — решение уравнений (15), то калибровочно преобразованные потенциалы φ' , A' в (16) также должны быть решениями при любой функции Φ . Это легко проверить подстановкой (16) в уравнения (15), что мы предлагаем сделать читателю.

Здесь уместно отметить различие между понятиями “инвариантность величины” и “инвариантность уравнений”. Когда говорят, что “такая-то величина инвариантна относительно таких-то преобразований”, то имеют в виду, что эта величина при данных преобразованиях не меняется. Для уравнений иначе: “инвариантность” означает только то, что данные преобразования переводят “решение в решение”, т. е. каждое отдельное решение (если их много) может при преобразованиях изменяться, а инвариантна в обычном смысле лишь совокупность всех решений. Сказанное выше — точная формулировка понятия “инвариантность уравнений”. Встречающиеся иногда формулировки типа “уравнения не меняют своего вида при данных преобразованиях” неконкретны и фактически бессодержательны.

Ввиду наличия “калибровочного произвола” (16) в решениях уравнений (15) на потенциалы можно накладывать некоторые дополнительные *калибровочные условия*, которые “фиксируют выбор калибровки”. Это полезно, так как выбор удобной калибровки позволяет упростить вид уравнений (см. ниже), а физика от этого выбора не зависит. Калибровочное

условие, разумеется, не может быть совершенно произвольным: оно обязательно должно быть “допустимым”, т. е. таким, что его всегда можно удовлетворить подходящим выбором калибровочного преобразования (16).

Допустимыми калибровочными условиями (доказательство их допустимости приводится ниже) являются, в частности, “кулоновская калибровка”

$$\operatorname{div} A = 0 \quad (17)$$

и “калибровка Лоренца”

$$\operatorname{div} A + c^{-1} \partial_t \varphi = 0. \quad (18)$$

В лоренцевской калибровке уравнения (15) для потенциалов принимают очень простой вид

$$\square \varphi = 4\pi \rho, \quad \square A = (4\pi/c)j, \quad (19)$$

т. е. сводятся к неоднородным волновым уравнениям, не содержащим “сцепления” между φ и A . В кулоновской калибровке (17) уравнения (15) принимают вид

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho, \quad \square A + c^{-1} \partial_t \nabla \varphi = (4\pi/c)j, \quad (20)$$

что также является существенным упрощением, поскольку в уравнение для φ не входит векторный потенциал A , а уравнение для A при уже известном из решения первого уравнения потенциале φ подобно (19).

Общее решение линейных неоднородных уравнений типа (19), (20) есть, как известно, сумма их частного решения и общего решения соответствующих однородных уравнений. Частным решением естественно выбрать то, которое порождается самими источниками ρ , j , считая их “идеально хорошими”, т. е. гладкими и локализованными в конечной области пространства-времени. Тогда и создаваемые ими поля будут “хорошими”, т. е. достаточно быстро убывающими при $t \rightarrow +\infty$ по времени и отсутствующими при $t \rightarrow -\infty$. Этим они принципиально отличаются от “свободных полей”, являющихся решениями однородных уравнений и описывающих распространение свободных электромагнитных волн. Последние порождаются не заданными источниками ρ , j , а “добавляются извне”, принося энергию из $-\infty$ по времени и унося ее на $+\infty$. Здесь можно отметить различие понятий “убывания” для однородного уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ и однородного волнового уравнения $\square \varphi = 0$. Решения первого уравнения,

которые называют “гармоническими функциями”, как известно из математики, не могут убывать при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ (простейшее из них есть const , прочие растут быстрее). Для волнового уравнения иначе: при заданном времени t в качестве решения можно взять убывающий на пространственной бесконечности волновой пакет, амплитуда которого будет затем уменьшаться с ростом времени из-за “расплывания пакета”.

Рассмотрим теперь вопрос о допустимости введенных калибровок, начав с кулоновского калибровочного условия (17). Предположим, что потенциал A , полученный при решении уравнений (15) для “хороших” (см. выше) источников, не удовлетворяет этому условию и будем искать калибровочное преобразование (16), для которого $\text{div } A' = \text{div}(A + \nabla \Phi) = 0$, т. е. $\Delta \Phi = -\text{div } A$. Здесь A дано, Φ ищется и доказательство существования решения для Φ есть доказательство допустимости данной калибровки. Ответ ясен из физических соображений, если воспользоваться аналогией полученного уравнения для Φ с уравнением для потенциала φ в электростатике, совпадающим с первым равенством (20). На таком языке наш вопрос звучит так: “дапа такая-то объемная плотность заряда (в нашем случае $\propto \text{div } A$), спрашивается, существует ли соответствующий ей потенциал?”. Ясно, что ответ утвердительный, если плотность заряда является “хорошей функцией”, т. е. гладкой и достаточно быстро убывающей на бесконечности. Поэтому данная калибровка допустима при естественном предположении “хорошего поведения” исходного векторного потенциала A , которое должно обеспечиваться “хорошим поведением” источников ρ, j .

Теперь можно обсудить проблему единственности решения полученного выше уравнения для Φ , другими словами, вопрос: фиксирует ли данная калибровка потенциалы однозначно или в них все еще остается некоторый калибровочный произвол? Ответ и здесь ясен: произвол в решении линейного неоднородного уравнения $\Delta \Phi = -\text{div } A$ есть общее решение однородного уравнения $\Delta \Phi = 0$, т. е. произвольная гармоническая функция. Из математики известно, что все такие функции на пространственной бесконечности не убывают. Поэтому решения для потенциалов в кулоновской калибровке будут однозначными, если наложить на потенциалы дополнительное требование убывания на пространственной бесконечности, что влечет ограничение $|\Phi| \leq \text{const}$ в (16) (вклад константы в Φ на потенциалах не отражается, так как в (16) входят только производные функции Φ).

Переходим теперь к лоренцовой калибровке (18). Доказательство ее допустимости выполняется аналогично, но теперь для искомой функции Φ в (16) получается следующее неоднородное волновое уравнение:

$\square\Phi = \operatorname{div} A + c^{-1}\partial_t\varphi$. Его решение при “хорошей” правой части всегда существует (впоследствии мы будем явно строить такие решения), т. е. данная калибровка допустима. Она фиксирует потенциалы однозначно тогда и только тогда, когда на них накладываются дополнительные асимптотические условия, исключающие “свободные поля”, т. е. отличные от нуля решения однородных волновых уравнений для потенциалов φ и A (см. выше).

Резюме: при рассмотрении радиотехнических задач типа “как излучает данная антенна” нас интересует, разумеется, только создаваемое ей самой поле и для исключения внешних свободных полей на потенциалы естественно накладывать нужные по смыслу асимптотические условия на бесконечности. При такой постановке приведенные выше калибровочные условия фиксируют потенциалы однозначно. Но если нас интересуют сами свободные поля (что естественно при постановке задач, например, в квантовой теории поля), то нельзя накладывать условия, которые эти самые поля исключают. В такой ситуации калибровочное условие Лоренца (18) не фиксирует потенциалы однозначно — в них еще остается “калибровочный произвол” (16) с любыми функциями Φ , удовлетворяющими однородному волновому уравнению $\square\Phi = 0$. Поэтому на потенциалы можно наложить еще одно калибровочное условие, например, $\varphi = 0$. Именно поэтому фотон — квант свободного электромагнитного поля — обладает только двумя “внутренними степенями свободы” (два независимых состояния с линейной или круговой поляризацией): это число 2 есть $4 - 2$, т. е. четыре компоненты потенциалов φ , A минус две связи, которые накладываются на них калибровочными условиями.

На этом мы заканчиваем первую главу — общее введение — и переходим к следующему крупному блоку.

Глава 2

Релятивистски-ковариантная формулировка электродинамики

Естественным языком для релятивистски-ковариантной формулировки основных уравнений электродинамики является язык тензоров и тензорных полей на группе Лоренца. Исходя из общего принципа “самодостаточности” данного курса лекций, мы приведем сначала все нужные определения и справочные сведения о тензорах и операциях с ними. Мы начнем с более простых объектов — тензорах на группе вращений обычного трехмерного пространства, затем опишем группу Лоренца преобразований координат четырехмерного пространства-времени и тензорный анализ на этой группе. Только после этого достаточно большого “математического отступления” мы вернемся непосредственно к электродинамике, так как это возможно лишь после разработки соответствующего математического языка. Главная цель — показать, что основные уравнения электродинамики на этом языке выглядят очень компактно и красиво, более того, сам язык почти однозначно подсказывает их общий вид, чего нельзя сказать об исходных уравнениях Максвелла (1)–(4). Конечно, при выполнении конкретных практических расчетов без такого языка вполне можно обойтись, но он очень важен для понимания общей структуры теории и ее внутренней красоты.

2.1 Обозначения

В первых разделах речь будет идти только о пространственных координатах, которые мы условились обозначать через $x = \{x_i, i = 1, 2, 3\}$ с буквенными (обязательно латинскими!) индексами типа $i, k, l, \dots$. Тогда матричные элементы произвольной 3×3 матрицы A обозначаются через A_{ik} , действие матрицы A на вектор x есть новый вектор с координатами $(Ax)_i = A_{ik}x_k$ (по повторяющимся индексам всегда суммирование), произведение двух матриц AB — новая матрица с элементами $(AB)_{ik} = A_{is}B_{sk}$. Символом “ $\top$ ” будет обозначаться “транспонирование” матрицы, т. е. перестановка индексов: $(A^\top)_{ik} = A_{ki}$, для произведения матриц $(AB)^\top = B^\top A^\top$, т. е. при транспонировании матрицы ставятся в обратном порядке. Понятие “детерминанта” (= “определителя”) $\det A$ матрицы A будем считать известным. При $\det A \neq 0$ матрица A имеет обратную A^{-1} , для которой $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$, где 1 в правой части — единичная матрица с элементами $(1)_{ik} = \delta_{ik}$ — символ Кронекера. Для произведения матриц $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ с изменением порядка множителей как и при транспонировании. Напомним также соотношения $\det(A^\top) = \det A$, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ для определителей и $(Ax, y) = (x, A^\top y)$ для скалярных произведений векторов $(x, y) = x_i y_i$.

2.2 Тензоры на группе вращений SO_3 и на группе O_3

Группа вращений SO_3 . Точки трехмерного пространства можно воспринимать чисто геометрически, но если мы хотим описать их положение количественно, то нужно ввести систему отсчета. Таковой принято считать набор трех взаимно ортогональных осей с фиксированным положением их центра. Координаты $\{x_i, i = 1, 2, 3\}$ заданной геометрической точки суть проекции на оси выбранной системы вектора, направленного в эту точку из начала координат. Если изменить систему отсчета, то координаты исходной геометрической точки, естественно, изменятся. В частности, если выполнить поворот осей системы отсчета как “жесткой конструкции”, сохраняя положение центра системы, то новые координаты будут связаны со старыми соотношением

$$x' = \omega x, \text{ или } x'_i = \omega_{ik} x_k, \quad (21)$$

в котором ω — “матрица поворота” (обозначение ω для таких матриц мы будем использовать постоянно). Первое равенство (21) — компактная запись: новый вектор x' получается действием матрицы ω на исходный вектор x , вторая формулировка в (21) — расшифровка первого в значках. При поворотах скалярные произведения векторов не изменяются, т. е. $(x, y) = (x', y') = (\omega x, \omega y) = (x, \omega^T \omega y)$, откуда следует $\omega^T \omega = 1$ или

$$\omega^T = \omega^{-1}. \quad (22)$$

Обладающие таким свойством матрицы называют *ортогональными*. Сразу отметим, что из условия ортогональности $\omega^T \omega = 1$, если взять $\det$ этого матричного равенства, следует $(\det \omega)^2 = 1$, т. е. $\det \omega$ для ортогональных матриц равен либо $+1$, либо -1 , тем самым они делятся на два не пересекающихся между собой класса. Поскольку любой из “чистых поворотов” можно непрерывно перевести в тождественное преобразование с $\omega = 1$, ясно, что таким преобразованиям соответствуют ортогональные матрицы ω с $\det \omega = 1$. Они образуют группу, которую обозначают SO_3 .

Напомним, что *группой* в математике называют любое множество элементов $a, b, \dots$, для которых: 1) определено понятие умножения элементов друг на друга, т. е. произведение ab — элемент того же множества; 2) есть единичный элемент “1”, для которого $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; 3) для каждого элемента a есть принадлежащий тому же множеству обратный элемент a^{-1} , для которого $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$; 4) для любых трёх элементов a, b, c выполняется соотношение ассоциативности $a(bc) = (ab)c$.

Множество всех ортогональных матриц ω образует группу при обычном определении умножения как произведения матриц. Для доказательства этого утверждения нужно проверить, что произведение двух ортогональных матриц — также ортогональная матрица, что единичная матрица ортогональна и что матрица, обратная к ортогональной, также ортогональна. Все эти факты легко установить непосредственно из определения ортогональности (22), что мы предлагаем сделать читателю. Эту группу принято обозначать O_3 (или O_n для n -мерного пространства).

Если часть элементов некоторой группы сама является группой, то ее называют “подгруппой” исходной группы. Очевидно, что множество всех ортогональных преобразований с $\det \omega = 1$, которые соответствуют “чистым поворотам осей координат” (см. выше), есть подгруппа группы O_3 , которую принято обозначать через SO_3 . Ортогональные преобразования второго типа с $\det \omega = -1$ не образуют группу, так как для произведения двух таких преобразований получим $\det \omega = 1$.

Простейшим из преобразований такого типа является *операция отражения пространственных осей* с матрицей $P = -1$:

$$Px = -x, \text{ в значках } (Px)_i = -x_i. \quad (23)$$

Очевидно, что это ортогональное преобразование и $\det P = -1$.

Справедливо *утверждение*: всякое ортогональное преобразование ω с $\det \omega = -1$ представимо в виде $\omega = P\omega'$, где $\omega' = P\omega$ — ортогональное преобразование с $\det \omega' = 1$ (учтено равенство $P^2 = 1$).

Таким образом, группа всех ортогональных преобразований O_3 состоит из двух непересекающихся подмножеств: подгруппа “чистых поворотов” SO_3 с $\det \omega = 1$ и преобразований поворотов с дополнительным отражением (23): условно $O_3 = SO_3 + P \cdot SO_3$.

Для дальнейшего полезно привести “индексный эквивалент” матричного условия ортогональности (22): взяв ik элемент матричного равенства $1 = \omega^\top \omega$, получим $\delta_{ik} = (\omega^\top)_{is} \omega_{sk} = \omega_{si} \omega_{sk}$, а из матричного равенства $1 = \omega \omega^\top$ аналогично получаем $\delta_{ik} = \omega_{is} (\omega^\top)_{sk} = \omega_{is} \omega_{ks}$. Итого, имеем:

$$\omega_{si} \omega_{sk} = \delta_{ik}, \quad \omega_{is} \omega_{ks} = \delta_{ik}, \quad (24)$$

т. е. свертка двух ω как по первым, так и по вторым индексам есть δ -символ по двум остающимся свободным значкам.

Тензоры на группе вращений. Термином “тензор” выражаются определенные свойства преобразования исследуемой величины при изменении, в данном случае повороте, системы отсчета. Разумеется, речь может идти лишь о таких математических или физических величинах, определение которых позволяет сказать, чему они равны в любой системе отсчета, чтобы можно было сравнивать их значения в разных системах. Сейчас мы будем говорить о группе вращений SO_3 и термин “тензор” без уточнения всегда будет обозначать “тензор на данной группе”. Конкретный поворот задается преобразованием координат (21), т. е. конкретной ортогональной матрицей ω с $\det \omega = 1$, — именно той, что преобразует координаты x_i .

Простейшим примером тензора является *скаляр* — это одна величина φ , которая при поворотах не изменяется: $\varphi' = \varphi$. Следующим по сложности объектом является *вектор*: это тройка величин или, что эквивалентно, величина типа A_i с одним латинским индексом, которая при поворотах преобразуется точно так же, как и сами координаты, т. е.

$$A'_i = \omega_{ik} A_k. \quad (25)$$

Поэтому сами координаты x_i — вектор по определению.

Тензором ранга n называется величина с n индексами, которая преобразуется как вектор по каждому из них:

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \omega_{i_1 k_1} \cdot \dots \cdot \omega_{i_n k_n} T_{k_1 \dots k_n}. \quad (26)$$

В частности, для тензоров второго и третьего ранга

$$T'_{ik} = \omega_{is} \omega_{km} T_{sm}, \quad T'_{ikl} = \omega_{is} \omega_{kp} \omega_{lm} T_{spm}. \quad (27)$$

Скаляр — тензор ранга 0, вектор — тензор ранга 1.

Еще раз подчеркнем, что тензорные свойства характеризуют закон преобразования, а не просто число компонент. Например, рассматривая задачу трех тел в механике, мы можем обозначить их массы через m_i , $i = 1, 2, 3$, но это будет не вектор, а набор трех скаляров. Примеры векторов в механике — координаты, скорость, ускорение, сила; пример скаляра — масса.

Рассмотрим теперь величины δ_{ik} и ε_{ikl} и покажем, что они действительно являются тензорами (ранг определяется числом значков). Имеется в виду, что δ и ε , по определению, имеют один и тот же вид во всех системах отсчета, и утверждается, что это совместно с тензорными законами преобразования, т. е. преобразованный по правилам (27) объект совпадает с исходным. Начнем с символа δ , для которого по первому правилу (27) получаем $\delta'_{ik} = \omega_{is} \omega_{km} \delta_{sm} = \omega_{is} \omega_{ks} = \delta_{ik}$ согласно условию ортогональности (24). Тем самым для δ_{ik} утверждение доказано.

Переходим теперь к символу ε , для которого по правилу (27) имеем

$$\varepsilon'_{ikl} = \omega_{is} \omega_{kp} \omega_{lm} \varepsilon_{spm}. \quad (28)$$

Мы хотим показать, что $\varepsilon'_{ikl} = \varepsilon_{ikl}$. Напомним (п. 1.2), что символ ε однозначно определяется следующими двумя свойствами: 1) полная антисимметрия и 2) $\varepsilon_{123} = 1$. Поэтому нам достаточно доказать, что величина ε'_{ikl} удовлетворяет этим двум требованиям. Начнем с антисимметрии: сделав в (28) перестановку свободных индексов ik и сопроводив ее перестановкой индексов суммирования sp , видим, что произведение трех ω в правой части (28) не изменяется, а в символе ε происходит перестановка индексов sp , что в силу известной антисимметрии ε приводит к изменению знака всего выражения, как и требуется. Те же соображения справедливы, очевидно, и для перестановки индексов kl в (28). Тем самым полная антисимметрия ε'_{ikl} доказана. Остается доказать равенство $\varepsilon'_{123} = 1$. Из (28) имеем

$\varepsilon'_{123} = \omega_{1s}\omega_{2p}\omega_{3m}\varepsilon_{spm}$. При учете определения символа ε в п. 1.2 ясно, что правая часть полученного равенства есть $\det \omega = 1$ (напомним, что речь идет о группе вращений), поэтому $\varepsilon'_{123} = 1$, что и требуется.

Итак, мы показали, что величины δ_{ik} и ε_{ikl} — действительно тензоры на группе вращений SO_3 , т. е. их постоянство во всех системах отсчета совместно с тензорным законом преобразования.

Операции с тензорами. Ввиду линейности по компонентам тензоров T закона преобразования (26) ясно, что сумма двух тензоров одной природы (т. е. ранга) — тоже тензор той же природы, с очевидным обобщением на любые линейные комбинации тензоров одной природы со скалярными коэффициентами.

Пусть A — тензор ранга n и B — тензор ранга m . Их *тензорным произведением* $A \otimes B$ называют величину с $n + m$ индексами, определенную соотношением

$$(A \otimes B)_{i_1 \dots i_{n+m}} = A_{i_1 \dots i_n} B_{i_{n+1} \dots i_{n+m}}. \quad (29)$$

Утверждение: тензорное произведение тензоров — тензор ранга $n + m$. Это очевидное следствие закона преобразования (26). Пример: тензорное произведение $A \otimes B$ двух векторов — тензор второго ранга $A_i B_k$.

Пусть T — тензор ранга $n \geq 2$, а i и k — некоторая пара его индексов. Если положить $k = i$ и затем просуммировать по всем возможным значениям $i = 1, 2, 3$ (что при наших соглашениях указывается просто повторением латинского индекса), то получим объект с $n - 2$ оставшимися свободными индексами, который называют “сверткой исходного тензора T по такой-то паре значков”. **Утверждение:** свертка есть тензор по оставшимся свободным индексам.

Поясним это утверждение на примере свертки $A_i \equiv T_{ikk}$ в тензоре T_{ikl} . Закон преобразования этого тензора известен из (27), поэтому имеем $A'_i \equiv T'_{ikk} = \omega_{is}\omega_{kp}\omega_{km}T_{spm} = \omega_{is}\delta_{pm}T_{spm} = \omega_{is}T_{spp} \equiv \omega_{is}A_s$ с учетом определения A и соотношения ортогональности (24) для свертки двух ω . Тем самым показано, что величина $A_i \equiv T_{ikk}$ преобразуется как вектор по свободному индексу i , что и требовалось доказать. Ясно, что в данном примере содержится идея общего доказательства: игра идет только на тех двух индексах T , которые сворачиваются между собой, и соответствующие им два множителя ω из (26) сворачиваются в δ -символ в силу условий ортогональности (24).

Тем самым общее утверждение можно считать доказанным: свертка внутри любого тензора по любой паре индексов есть тензор по оставшимся

значкам. Пример рассуждения: скалярное произведение $A_i B_i$ векторов A и B есть скаляр, так как это свертка в тензорном произведении $A_i B_k$.

Обобщая это замечание, можно сказать, что “свертка тензора с тензором есть тензор”. Для определения природы величин иногда бывает полезным следующее в некотором роде обратное утверждение, а именно,

Лемма о “свертке неизвестного с известным”: если свертка некоторой величины со значками с некоторым тензором, компоненты которого могут принимать любые численные значения, есть тензор, то исходная величина — также тензор.

Проиллюстрируем это утверждение на следующем конкретном примере, из которого будет ясно виден смысл утверждения. Пусть T_{ik} — некоторая величина с двумя индексами (неизвестно, тензор или нет), пусть A_i — вектор, компоненты которого могут принимать любые численные значения, и пусть сказано, что свертка $T_{ik} A_k \equiv B_i$ — также вектор. Тогда утверждается, что T_{ik} — тензор второго ранга.

Доказательство: по условию $A'_i = \omega_{ik} A_k$ (поскольку A — вектор) и $B'_i = \omega_{ik} B_k$ (так как B — тоже вектор). Далее, из определения B (которое, разумеется, считается справедливым во всех системах отсчета) имеем $B'_i = T'_{ik} A'_k = T'_{ik} \omega_{ks} A_s$. С другой стороны, поскольку B — вектор, имеем $B'_i = \omega_{ik} B_k = \omega_{ik} T_{ks} A_s$. Приравнявая эти два выражения для B'_i и отбирая в полученном равенстве коэффициент при A_s (что допустимо из-за оговоренной в условиях произвольности компонент A), получаем: $T'_{ik} \omega_{ks} = \omega_{ik} T_{ks}$. Умножив обе части этого равенства на ω_{ps} и просуммировав по всем возможным значениям 1, 2, 3 индекса s (что будет указываться просто его повторением) с учетом условия ортогональности (24), получаем: $\omega_{ik} \omega_{ps} T_{ks} = \omega_{ps} \omega_{ks} T'_{ik} = \delta_{pk} T'_{ik} = T'_{ip}$, что совпадает с точностью до обозначений индексов с законом преобразования (27) для тензора второго ранга, — это и требовалось доказать. Суть дела в том, что для любой свертки $TA \equiv B$ по известным законам преобразования A и B можно найти закон преобразования “неизвестной величины” T , и если A и B — “правильные объекты” (= тензоры), то T также должен быть “правильным объектом”. Пример: если свертка $x_i y_i = \varphi$ — скаляр, а x_i — вектор, то y_i — тоже вектор.

Лемма о “свертке неизвестного с известным” понадобится нам в дальнейшем.

Пространственные отражения. Физические величины, как правило, обладают определенными трансформационными свойствами не только по отношению к поворотам системы отсчета, но и по отношению к другим

преобразованиям координат, в частности, пространственным отражениям (23). Включение операции отражения P с математической точки зрения означает переход к рассмотрению тензоров на более широкой группе O_3 всех ортогональных преобразований координат, состоящей, как уже говорилось, из простых поворотов и поворотов с дополнительным отражением осей. Поэтому при обобщении понятия “тензор” на группу O_3 достаточно задать лишь один новый закон преобразования объекта при пространственном отражении (23). Для O_3 -тензоров этот закон очень прост: “преобразованный объект есть $\pm$ исходный”. *Определение:* тензор ранга n называют *истинным*, если при отражении (23)

$$T'_{i_1 \dots i_n} = (-1)^n T_{i_1 \dots i_n}, \quad (30)$$

и *псевдотензором*, если

$$T'_{i_1 \dots i_n} = (-1)^{n+1} T_{i_1 \dots i_n}. \quad (31)$$

В частности, для истинного скаляра $\varphi' = \varphi$, а для псевдоскаляра $\varphi' = -\varphi$, для истинного вектора $A'_i = -A_i$, для псевдовектора $A'_i = A_i$, и так далее.

Величины δ_{ik} и ε_{ikl} , по определению, имеют один и тот же вид во всех системах отсчета, т. е. не изменяют знака при отражении осей. Поэтому из (30), (31) следует, что δ_{ik} — истинный тензор, а ε_{ikl} — псевдотензор.

Ясно, что операция свертки не меняет класса тензора, поскольку ранг изменяется на четное число. Ясно также, что произведение двух тензоров одного класса — истинный тензор, а разных классов — псевдотензор (подобно символическим равенствам $(+1) \times (+1) = +1$, $(-1) \times (-1) = +1$, $(+1) \times (-1) = -1$). Например, векторное произведение $\varepsilon_{ikl} A_k B_l$ двух истинных векторов — псевдовектор ($-1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$).

2.3 Тензорные поля

Определения. Тензорное поле есть тензор, заданный в каждой точке пространства, т. е. функция $T_{i_1 \dots i_n}(x)$, где x — координаты данной геометрической точки. Закон преобразования тензорного поля при ортогональных (группа O_3) преобразованиях $x \rightarrow x' = \omega x$ есть обычный тензорный закон преобразования (26), только с уточнением аргументов x, x' :

$$T'_{i_1 \dots i_n}(x') = \omega_{i_1 k_1} \cdot \dots \cdot \omega_{i_n k_n} T_{k_1 \dots k_n}(x). \quad (32)$$

Обратим внимание на различие аргументов x в двух частях равенства, а также на то, что точка с координатами x в исходной системе отсчета и точка с координатами x' в преобразованной системе — это одна и та же геометрическая точка. Например, для скалярного поля

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \quad (33)$$

для векторного поля $A'_i(x') = \omega_{ik} A_k(x)$ и т. д.

Типичный пример скалярного поля — плотность заряда $\rho(x)$ в электростатике при любом виде этой функции. Физический смысл закона преобразования типа (33) — “объективность” распределения заряда, т. е. его независимость от выбора системы отсчета. Поясним: количество заряда dQ в бесконечно малом объеме вокруг некоторой геометрической точки в исходной системе дается соотношением $dQ = \rho(x)dx$, а в преобразованной $dQ = \rho'(x')dx'$, где x и x' — координаты данной геометрической точки в разных системах, dx и dx' — дифференциалы объема. Величина dQ “объективна”, поэтому $\rho(x)dx = \rho'(x')dx'$. Для поворотов осей $dx = dx'$ и после сокращения этого множителя для функции $\rho(x)$ получаем закон преобразования (33). Он справедлив и для операции отражения (23), так как дифференциал объема и в этом случае можно считать инвариантным (изменение знака $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ компенсируется перестановкой пределов интегрирования $\pm\infty$ в интегралах по x). Таким образом, $\rho(x)$ — истинное скалярное поле.

В заключение отметим, что если в левой части соотношения (33) заменить φ' на φ , то равенство приобретет совершенно иной смысл и будет выражать, если речь идет о группе вращений, свойство сферической симметрии функции $\varphi(x)$.

Тензорные свойства операции дифференцирования. На тензорных полях имеет смысл операция дифференцирования $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$. Покажем, что при ортогональных преобразованиях координат $x \rightarrow x' = \omega x$ производные преобразуются точно так же, т. е. $\partial \rightarrow \partial' = \omega \partial$, другими словами, символ ∂ ведет себя как истинный вектор на группе O_3 .

Для доказательства рассмотрим сначала произвольное линейное преобразование координат $x' = Lx$ с некоторой невырожденной ($\det L \neq 0$) матрицей L и будем искать связь между ∂ и ∂' , т. е. между производными по x и по x' . Ответ получить нетрудно: по правилам дифференцирования при замене переменных имеем $\partial/\partial x'_i = (\partial x_k/\partial x'_i)(\partial/\partial x_k)$, т. е. требуется найти матрицу $\partial x_k/\partial x'_i$. Для этого перепишем равенство $x' = Lx$ в виде $x = L^{-1}x'$, т. е. $x_i = (L^{-1})_{ik}x'_k$, откуда следует $\partial x_i/\partial x'_k = (L^{-1})_{ik}$.

Подставив это в приведенное выше выражение для $\partial/\partial x'_i$, получаем $\partial/\partial x'_i = (L^{-1})_{ki}(\partial/\partial x_k)$, в компактной записи $\partial'_i = (L^{-1})_{ki}\partial_k = (L^{-1\top})_{ik}\partial_k$ (отметим, что операции “ -1 ” и “ $\top$ ” перестановочны, т. е. $(L^{-1})^\top = (L^\top)^{-1}$, поэтому запись $L^{-1\top}$ корректна и не ведет к недоразумениям). Резюме: для любой невырожденной матрицы L

$$x' = Lx \Rightarrow \partial' = L^{-1\top} \partial. \quad (34)$$

Это нам понадобится впоследствии при обсуждении группы Лоренца.

Вернемся теперь к нашим преобразованиям группы O_3 , для которых $L = \omega$ — ортогональная матрица. Из условия ортогональности (22) следует, что $\omega^{-1\top} = \omega$, т. е. координаты x и производные ∂ преобразуются одинаково:

$$x' = \omega x \Rightarrow \partial' = \omega \partial. \quad (35)$$

Это означает, что символ ∂_i можно считать вектором на группе O_3 , причем истинным, поскольку $\partial/\partial(-x) = -\partial/\partial x$, т. е. при отражении он меняет знак.

Таким образом, символ ∂ — “правильный объект”, этим термином здесь и далее для краткости обозначаем любые тензоры или тензорные поля. Поэтому все, что строится с помощью корректных операций (тензорное произведение, свертка) из символа ∂ и других правильных объектов — тоже правильный объект, а его тип (“истинный” или “псевдо”) определяется числом множителей “псевдо” (подобно множителям -1) в рассматриваемой конструкции. Например, если φ — скалярное поле, то его градиент $\partial_i \varphi$ — векторное поле того же типа, как и φ . Еще один пример — ротор $(\text{rot } A)_i = \varepsilon_{ikl} \partial_k A_l$, который для истинного векторного поля A — псевдовекторное поле, а для псевдовекторного A — истинное векторное поле. Отметим также, что оператор Лапласа $\Delta = \partial_i \partial_i$ — скаляр, так как это свертка двух “правильных” объектов ∂_i .

Если признать плотность заряда ρ в уравнениях Максвелла (1)–(4) истинным скалярным полем (что обосновывалось ранее), то из требования взаимной согласованности свойств всех вкладов в этих уравнениях следует, что j и E должны быть истинными векторными полями, а H — псевдовекторным.

2.4 Электродинамика и принцип относительности

В этом разделе мы хотим пояснить роль, которую сыграла электродинамика в создании теории относительности Эйнштейна. Под “системой отсчета” теперь будет пониматься система отсчета координат x , t пространства-времени.

В механике вводится понятие “инерциальной системы отсчета” — такой, в которой справедлив первый закон Ньютона: материальная точка (или центр тяжести произвольного тела), на которую не действуют никакие силы, движется равномерно и прямолинейно. На основании опыта постулируется, что такие системы существуют, и что каждая из них движется относительно другой равномерно и прямолинейно. Если исключить из рассмотрения тривиальные трансляции (т. е. сдвиги начала отсчета) координат и времени, а также тривиальные общие растяжения масштабов (т. е. преобразования $t' = \lambda t$, $x' = \lambda x$ с одинаковым коэффициентом λ), то любые две покоящиеся относительно друг друга инерциальные системы связаны между собой ортогональным преобразованием координат (поворот или поворот с отражением), а в общем случае к такому преобразованию добавляется переход к системе, движущейся относительно исходной системы с некоторой скоростью v .

Принцип относительности — это утверждение о полном равноправии всех инерциальных систем отсчета.

Чтобы дать четкую математическую формулировку этого принципа, необходимо иметь явные формулы, связывающие пространственные координаты и время в разных инерциальных системах отсчета. В качестве таковых в классической механике всегда принимались следующие формулы преобразований Галилея:

$$t' = t, \quad x' = \omega(x - vt), \quad (36)$$

где ω — ортогональная матрица преобразования координат, а v — скорость новой системы относительно исходной (в дальнейшем M — исходная система, M' — преобразованная). Эти преобразования образуют группу, называемую “группой Галилея”. Множество ортогональных преобразований ($v = 0$, ω произвольно), а также множество преобразований перехода к движущейся системе отсчета с сохранением ориентации осей ($\omega = 1$, v произвольный вектор) являются подгруппами группы Галилея.

Математическим выражением принципа относительности является свойство ковариантности основных законов механики по отношению к преобразованиям Галилея. Под “ковариантностью” понимается следующее: все входящие в формулы величины обладают определенными трансформационными свойствами по отношению к рассматриваемым преобразованиям и обе части выражающих эти законы равенств преобразуются одинаково, поэтому из справедливости равенства в одной инерциальной системе отсчета автоматически следует, что это равенство будет справедливым и в любой другой инерциальной системе, как и требует принцип относительности. Например, в законах механики Ньютона сила считается истинным вектором по отношению к ортогональным преобразованиям координат, не изменяющимся при переходе к движущейся системе отсчета. Точно такими же трансформационными свойствами обладает и ускорение d^2x/dt^2 , масса — скаляр, поэтому во втором законе Ньютона “сила = масса $\times$ ускорение” обе части равенства преобразуются одинаково, т. е. этот закон явно ковариантен. Третий закон Ньютона “действие равно противодействию” имеет в виду действующие на объекты силы, т. е. здесь также приравниваются величины одной природы, что обеспечивает ковариантность.

Вернемся теперь к преобразованиям Галилея (36). В классической “до-эйнштейновской” физике они считались самоочевидными, поскольку время t , казалось бы, не имеет никакого отношения к пространственным координатам x , а из инвариантности времени ($t = t'$) автоматически следует закон преобразования координат в (36). Следствием (36) является классический закон сложения скоростей: если в движущейся системе M' точка движется с некоторой скоростью u , а сама система M' движется по отношению к неподвижной системе M со скоростью v , то скорость движения точки в системе M есть векторная сумма $u + v$.

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла. В лоренцевской калибровке для потенциалов они принимают вид (19) с волновым оператором (14), так что для свободного электромагнитного поля (“свет”) сводятся к однородным волновым уравнениям $\square\varphi = 0$, $\square A = 0$. Хорошо известно (и легко проверить), что такие уравнения имеют решения в виде монохроматических плоских волн $\propto \cos(\omega t - kx)$ с условием $\omega = c|k|$, при этом константа c имеет смысл “скорости света”, т. е. фазовой скорости волны (скорость движения в пространстве поверхности постоянной фазы $\omega t - kx = \text{const}$ в аргументе косинуса).

Итак, из уравнений Максвелла однозначно следует, что скорость распространения электромагнитных колебаний ("скорость света") равна c , где c — параметр в волновом операторе (14). Но с другой стороны, согласно формулам преобразований Галилея, скорость света не может быть одной и той же во всех инерциальных системах отсчета, поскольку к скорости света, излучаемого движущимся источником, должна добавляться скорость самого источника согласно классическому закону сложения скоростей.

Никто, однако, в то время не усматривал здесь противоречия, да его и не было: волновое уравнение уже неоднократно ранее встречалось в физике при описании различных волновых процессов (волны на воде, распространение звука в воздухе и твердой среде и т. п.) и тот факт, что волновое уравнение с некоторым (своим для каждой задачи) параметром " c " однозначно предсказывает скорость распространения волны, никогда не считался противоречащим основным представлениям механики и формулам преобразований Галилея. Для всех изучавшихся ранее колебательных процессов всегда существовала некоторая среда, являющаяся переносчиком колебаний (т. е. "то, что колеблется"), и когда писалось волновое уравнение, то всегда подразумевалось, что сама среда неподвижна. Иначе говоря, волновое уравнение считалось справедливым лишь в системе отсчета, неподвижной относительно переносящей колебания среды, и предсказываемая волновым уравнением фазовая скорость волны (параметр c в операторе $\square$) есть скорость по отношению к переносящей колебания среде. В движущейся относительно среды системе отсчета тот же самый волновой процесс должен описываться другим уравнением, которое получается из обычного волнового уравнения с помощью галилеевской замены переменных $x, t \rightarrow x', t'$.

Для физиков XIX века все эти соображения казались настолько самоочевидными, что не возникало никаких сомнений в том, что они применимы и к уравнениям Максвелла, описывающим электромагнитные колебания. Та гипотетическая среда, которая должна играть роль переносчика этих колебаний, была названа "эфиром", а уравнения Максвелла считались справедливыми лишь в системе координат, неподвижной относительно эфира, константа " c " в волновом операторе — скорость света в данной системе. Для движущегося относительно эфира наблюдателя, в частности, наблюдателя на Земле, скорость света должна быть иной в соответствии с галилеевским законом сложения скоростей. Разумеется, из этого следовало, что для движущегося наблюдателя уравнения Максвелла неточны, поскольку не учитывают поправку на движение системы относительно

эфира. На естественный вопрос: "почему же с помощью выполненных на Земле экспериментов мы получили уравнения Максвелла без поправок?" был столь же естественный ответ: "потому, что скорости наблюдателя по отношению к скорости света столь малы, что все эти поправки ничтожны и не проявляются в простых опытах, так что для их обнаружения нужны специальные очень точные эксперименты". При этом никто не сомневался, что такие эксперименты, будучи поставленными, явно обнаружат эффекты, обусловленные движением Земли относительно эфира.

Когда уровень развития экспериментальной техники позволил наконец поставить такие эксперименты (самым знаменитым из них был широко известный опыт Майкельсона), ко всеобщему удивлению оказалось, что таких эффектов нет. В частности, скорость света по отношению к земному наблюдателю оказалась точно равной " c " независимо от направления распространения света, что совершенно несовместно с классическим законом сложения скоростей, если считать, что Земля движется относительно эфира.

Результат казался удивительным, но многократные тщательные переверки показали, что это действительно так: никакие опыты не позволяют установить факт движения Земли относительно эфира и скорость света относительно земного наблюдателя в точности равна " c " в любом направлении. Дело обстоит так, как если бы уравнения Максвелла были справедливы не только в системе отсчета, неподвижной относительно эфира, но и в системе, связанной с Землей. Но так как последняя ничем не выделена в классе всех инерциальных систем (криволинейностью движения Земли, естественно, пренебрегаем), то придется признать уравнения Максвелла справедливыми для всех без исключения инерциальных систем отсчета. Но отсюда следует, во-первых, что нет необходимости в самом понятии эфира и привилегированной системы отсчета, неподвижной относительно эфира; во-вторых, это подразумевает отказ от обычных формул галилеевских преобразований (36), так как они с необходимостью приводят к классическому закону сложения скоростей.

Этот вывод, ири всей его очевидности, настолько противоречил общепринятому тогда "здравому смыслу", что предпринимались разнообразные попытки объяснить все как-то иначе, не покушаясь на свойства самого пространства-времени, а приписывая некоторые необычные свойства материальным телам (например, гипотеза Лоренца о сокращении размеров всех движущихся тел в направлении движения). Заслуга Эйнштейна состоит в том, что он первым четко выразил мысль о необходимости

отказаться от формул преобразований Галилея, описывающих переход к движущейся системе отсчета, и заменить их какими-то другими формулами преобразования координат и времени. Эти новые формулы уже не должны приводить к классическому закону сложения скоростей и должны автоматически обеспечивать постоянство скорости света во всех инерциальных системах отсчета: если в некоторой системе “нечто” движется равномерно и прямолинейно со скоростью света c , то абсолютная величина скорости в другой инерциальной системе также должна быть равна c (направление вектора скорости может при этом меняться). Эти новые формулы, заменяющие формулы галилеевских преобразований (36), называются преобразованиями Лоренца, так как он вывел их еще до Эйнштейна из других соображений. Но именно Эйнштейн впервые приписал им прямой смысл законов преобразования пространственно-временных координат, т. е. свойств самого пространства-времени, в чем и состоит суть теории относительности.

2.5 Преобразования Лоренца, общие свойства

Введем вместо времени t переменную $x_0 = ct$, имеющую такую же размерность, как и пространственные координаты x_i , и объединим x_0 и x_i в четырехмерный вектор (пока что этот термин условный, его точный смысл пояснится в дальнейшем) $x \equiv \{x_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3\}$.

Соглашение: четырехмерные индексы, принимающие значения 0, 1, 2, 3, будем обозначать греческими буквами, в отличие от латинских, соответствующих только трем пространственным компонентам 1, 2, 3. По повторяющемуся греческому индексу подразумевается суммирование по всем его возможным значениям 0, 1, 2, 3, по повторяющемуся латинскому индексу — суммирование по 1, 2, 3. Поэтому условно $\alpha\alpha = 00 + ii$, т. е. суммирование по повторяющемуся греческому индексу есть вклад “00” + суммирование по латинскому индексу (с любым его обозначением).

Соглашение: с некоторого момента в дальнейшем нам придется ввести и тщательно различать верхние и нижние греческие индексы. Но пока этого не требуется, поэтому мы будем ставить все индексы снизу и понимать все формулы (действие матрицы на вектор, произведение матриц и т. п.) с греческими индексами точно так же, как и с латинскими, различая их лишь возможным набором цифровых значений (0, 1, 2, 3 или 1, 2, 3).

Вернемся теперь к нашей основной задаче. Итак, мы ищем некоторые новые формулы преобразований четырехмерных координат $x'_\alpha = f_\alpha(x)$, которые должны заменить формулы преобразований Галилея (36). При выводе этих новых формул “преобразований Лоренца” мы будем руководствоваться только следующими общими принципами:

1) это формулы, связывающие координаты x двух инерциальных систем отсчета;

2) они должны автоматически обеспечивать постоянство скорости света c во всех инерциальных системах отсчета;

3) совокупность таких преобразований должна быть группой, т. е. произведение двух преобразований — преобразование того же класса;

4) преобразования должны сохранять тензорные O_3 -свойства величин: в любой системе время t — истинный скаляр, а пространственные координаты x_i — истинный вектор на группе O_3 ;

5) непрерывность: новые переменные x' — непрерывные функции x , и наоборот. Кроме этого, мы будем отбрасывать тривиальные трансляции (сдвиги начала отсчета координат и времени), а также тривиальные общие растяжения масштабов, поскольку они исключены и из галилеевских преобразований (36), аналог которых мы ищем.

Мы покажем, что сформулированных требований достаточно для определения явного вида преобразований Лоренца.

Начнем с принципа 1: “инерциальная система переходит в инерциальную”. Уже отсюда вытекают существенные ограничения на вид функций $f_\alpha(x)$. Действительно, из определения инерциальной системы следует, что если в одной из них материальная точка движется равномерно и прямолинейно, то это должно быть справедливым и для любой другой инерциальной системы. Такое движение в исходной системе M описывается уравнением $x_i = a_i x_0 + b_i$ с некоторыми параметрами a_i и b_i , что соответствует геометрически некоторой прямой в четырехмерном пространстве координат x . Тогда для новой системы M' должно быть $x'_i = a'_i x'_0 + b'_i$, т. е. преобразование $x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = f_\alpha(x)$ должно переводить “прямую в прямую”. Ясно, что этому требованию удовлетворяют произвольные линейные неоднородные преобразования $x'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta + c_\alpha$ с не зависящими от координат x матрицей Λ и вектором трансляций c , т. е. линейность преобразования — достаточное условие перевода “прямую в прямую”.

Но оно не необходимо, так как “прямую в прямую” переводят также и дробно-линейные преобразования $x'_\alpha = A_\alpha(x)/B(x)$ с произвольными линейными неоднородными формами $A_\alpha(x)$ и $B(x)$ переменных x . Но они

не удовлетворяют принципу 5 — непрерывности x' по x из-за разрывов при обращении в нуль знаменателя $B(x)$, поэтому исключаются. Других преобразований, переводящих “прямую в прямую”, не существует (за эти уточнения автор признателен С. Н. Маниде).

Таким образом, из принципов 1 и 5 вытекает линейность искомых формул преобразования четырехмерных координат. Отбрасывая по соглашению (см. выше) тривиальные трансляции, будем в дальнейшем ограничиваться только линейными однородными преобразованиями:

$$x' = \Lambda x, \text{ или } x'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (37)$$

где Λ — некоторая не зависящая от координат x матрица 4×4 .

Обратимся теперь ко второму постулату — требованию постоянства скорости света, и посмотрим, какие ограничения он накладывает на матрицу Λ в (37). Пусть некоторая точка движется в исходной системе M со скоростью света c , т. е. $x_i = cn_i t = n_i x_0$, где n_i — единичный трехмерный вектор направления движения (здесь и далее речь идет о прямых, проходящих через начало координат, чего достаточно при обсуждении однородных преобразований (37)). Тогда в новой системе M' должно быть $x'_i = cn'_i t' = n'_i x'_0$ с некоторым, возможно другим, единичным вектором n'_i , но с тем же самым параметром c . Из равенства $x_i = n_i x_0$ следует $x_0^2 - x_i x_i = 0$. Множество точек x четырехмерного пространства, удовлетворяющих этому соотношению, образует, как известно, поверхность конуса, который называют “световым” (см. рис. 2.1). Таким образом, наша пря-

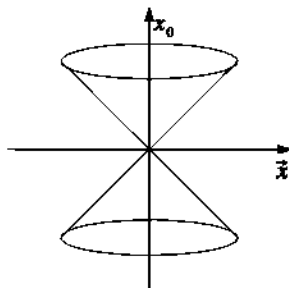


Рис. 2.1. Световой конус

мая $x_i = n_i x_0$ проходит через начало координат и лежит на поверхности светового конуса, а постулат постоянства скорости света может быть теперь переформулирован следующим образом: преобразование (37) должно

быть таким, что оно переводит любую прямую, лежащую на поверхности светового конуса, в прямую, которая также лежит на поверхности этого конуса. Учитывая, что линейное преобразование (37) переводит "прямую в прямую" автоматически, утверждение можно сформулировать проще: всякая точка x , находящаяся на поверхности светового конуса, должна переходить в точку x' , также находящуюся на поверхности этого конуса. Действительно, взяв произвольную точку x на поверхности конуса и проведя прямую через нее и начало координат, заключаем, что "образ" этой прямой как целого лежит на поверхности конуса, следовательно, на ней же будет находиться и "образ" x' исходной точки x . Другими словами, преобразование (37) должно переводить поверхность светового конуса в себя.

Определим 4×4 матрицу g , которую будем называть в дальнейшем *метрическим тензором*, как диагональную матрицу с элементами

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta. \quad (38)$$

Сразу же отметим матричные равенства: $g^2 = 1$, т. е. $g^{-1} = g$.

Поверхность светового конуса есть множество точек, для которых $x_0^2 - x_i x_i = 0$. Левая часть этого равенства есть квадратичная форма, которую можно записать в виде $g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ или (x, gx) , если пользоваться обозначениями линейной алгебры. Таким образом, поверхность светового конуса есть множество тех точек x , для которых $(x, gx) = 0$, а требование постоянства скорости света на таком языке формулируется следующим образом: равенство $(x, gx) = 0$ влечет $(x', gx') = (\Lambda x, g\Lambda x) = 0$ и обратно, иначе говоря, квадратичные формы (x, gx) и (x', gx') обращаются в нуль одновременно. *Утверждение:* из совпадения нулей этих двух квадратичных форм следует, что они пропорциональны, т. е.

$$(x', gx') = a(x, gx), \quad (39)$$

где a — некоторый не зависящий от x положительный коэффициент.

Доказательство. Ясно, что пропорциональность обеспечивает совпадение нулей, поэтому нетривиальна лишь "необходимость". Ее доказательство основано на применении следующей простой леммы: если два полинома $P_{1,2}(z)$ одного норядка имеют общие корни z_i , то они пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности равен отношению коэффициентов при старшей степени z в этих двух полиномах. Действительно, всякий полином $P(z)$, как известно, определяется своими корнями z_i с точностью

до множителя: $P(z) = \text{const} \cdot \Pi_i(z - z_i)$, причем const — коэффициент при старшей степени z в $P(z)$. Отсюда и вытекает сказанное выше о взаимной пропорциональности двух полиномов.

Применим эту лемму к нашим двум квадратичным формам (x, gx) и $(x', gx') = (\Lambda x, g\Lambda x) = (x, \Lambda^T g \Lambda x)$, рассматривая их как полиномы второго порядка по одной переменной x_0 , а пространственные координаты x_i считая параметрами. Полином $(x, gx) = x_0^2 - x_i x_i$ имеет два вещественных корня по переменной x_0 , совпадающие, по условию, с корнями второй квадратичной формы. Следовательно, к этим двум полиномам применима сформулированная выше лемма: две формы пропорциональны. Коэффициент пропорциональности a есть отношение коэффициентов при старших (вторых) степенях x_0 в этих полиномах. Для полинома $(x, gx) = x_0^2 - x_i x_i$ этот коэффициент равен единице. Для второго полинома $(x', gx') = (\Lambda x, g\Lambda x) = (x, \Lambda^T g \Lambda x) = x_\alpha (\Lambda^T g \Lambda)_{\alpha\beta} x_\beta$ коэффициент при x_0^2 есть матричный элемент $(\Lambda^T g \Lambda)_{00}$, т. е. величина, не зависящая ни от переменной x_0 , ни от параметров x_i . Тем самым доказана справедливость соотношения (39) с не зависящим от x коэффициентом a .

Покажем теперь, что $a > 0$ (это важно для дальнейшего). В более подробной записи соотношение (39) имеет вид

$$(x'_0)^2 - x'_i x'_i = a[x_0^2 - x_i x_i] \quad (40)$$

и справедливо для любых $x = \{x_0, x_i\}$. Распишем теперь подробнее соотношение (37) с разделением индексов на “временные-пространственные”:

$$x'_0 = \Lambda_{00}x_0 + \Lambda_{0k}x_k, \quad x'_i = \Lambda_{i0}x_0 + \Lambda_{ik}x_k. \quad (41)$$

Пользуясь произвольностью x , можно положить $x_0 = 0$ и выбрать такой вектор x_k , для которого $\Lambda_{0k}x_k = 0$, тогда из (41) получим $x_0 = x'_0 = 0$. Подставляя эти значения в соотношение (40) с учетом очевидной положительности выражений типа $x_i x_i$, заключаем, что $a > 0$.

Таким образом, мы доказали справедливость соотношения (39) для любого преобразования (37), удовлетворяющего постулату постоянства скорости света. К этому классу принадлежат и общие растяжения масштабов $x'_\alpha = \lambda x_\alpha$, не изменяющие значения скорости, которые мы условились (см. выше) исключать как “тривиальные”. Ясно, что если сопроводить преобразование (37) последующим общим растяжением $x''_\alpha = \lambda x'_\alpha$, то получим аналогичное преобразование с заменой $a \rightarrow a\lambda^2$. Это значит,

что тривиальным общим растяжением масштабов можно менять значение коэффициента a в (39) без изменения его знака. Поэтому можно сказать, что произвольное преобразование (37), удовлетворяющее постулату постоянства скорости света, может быть представлено в виде произведения преобразования с некоторым фиксированным значением коэффициента a в (39) плюс дополнительного общего растяжения масштабов (важно, что $a > 0$ по доказанному).

Выделенную роль играют преобразования с $a = 1$.

Определение: преобразованиями Лоренца называются преобразования (37), для которых в (39) $a = 1$, т. е.

$$(x', gx') = (x, gx), \quad x' = \Lambda x. \quad (42)$$

Утверждение: преобразования (42) образуют группу. Это очевидно: если мы выполним преобразование $x \rightarrow x'$, при котором $(x', gx') = (x, gx)$, а затем второе преобразование $x' \rightarrow x''$, при котором $(x'', gx'') = (x', gx')$, то получим $(x'', gx'') = (x, gx)$, т. е. $x \rightarrow x''$ — преобразование из того же класса. Ясно также, что единичное (тождественное) преобразование входит в данный класс, как и обратное $x' \rightarrow x$ ввиду полной симметрии x и x' .

Теперь легко пояснить выбор $a = 1$ в (39) — при любом другом выборе фиксированного значения коэффициента a мы не получали бы группу (коэффициент для произведения двух преобразований был бы равен $a^2 \neq a$), что противоречило бы сформулированному на с. 50 принципу 3 (“группа”). [Замечание С. П. Маниды: результат верен, но его вывод требует уточнения. Для получения группы вместо $a = 1$ можно было бы использовать любую функцию $a(\Lambda)$ от определенных в (42) преобразований Лоренца Λ , обладающую групповым свойством $a(\Lambda_1)a(\Lambda_2) = a(\Lambda_1\Lambda_2)$, такие функции называют “характерами группы”. Из математики известно, что группа Лоренца не имеет отличных от $a = 1$ нетривиальных характеров, — только с учетом этого замечания выбор $a = 1$ становится однозначным.]

Итак, можно сказать, что произвольное преобразование (37), удовлетворяющее постулату постоянства скорости света, есть комбинация преобразования Лоренца (42) и некоторого тривиального общего растяжения масштабов (которые, по соглашению, исключаются). В дальнейшем мы будем рассматривать только преобразования Лоренца (42).

Замечание: определенное соотношением (42) множество преобразований координат, “сохраняющих заданную квадратичную форму (x, gx) ”, всегда является группой независимо от явного вида метрического тензора g .

В частности, рассматривавшиеся ранее ортогональные преобразования координат есть группа, сохраняющая форму $x_i x_i = (x, x)$ с единичным метрическим тензором $g = 1$.

Ввиду произвольности x в равенстве $(x, gx) = (x', gx') = (x, \Lambda^T g \Lambda x)$ его можно переписать в виде требования на саму матрицу Λ , а именно,

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \quad (43)$$

что можно считать другим определением преобразований группы Лоренца, эквивалентным определению (42). Сказанное выше — следствие хорошо известного утверждения: если A и B — симметричные матрицы и $(x, Ax) = (x, Bx)$ для любого x , то $A = B$ (у нас матрица g симметрична по определению, а симметричность матрицы $\Lambda^T g \Lambda$ легко проверяется с учетом правила транспонирования произведения матриц). Приведем доказательство: если перенести все вклады в левую часть, то нужно доказать следующее: для симметричной матрицы A из равенства $(x, Ax) = 0$ для любого x следует $A = 0$. Для доказательства возьмем $x = y + z$, где y и z — произвольные векторы. Тогда получим: $0 = (x, Ax) = ((y + z), A(y + z)) = (y, Ay) + (z, Az) + (y, Az) + (z, Ay)$. Два первых вклада в правой части исчезают по условию, а два следующих равны между собой ввиду симметричности матрицы $A = A^T$: $(z, Ay) = (Az, y) = (y, Az)$. Таким образом, получаем $(y, Az) = 0$ для любых векторов y и z , откуда следует $A = 0$ для матрицы A .

Таким образом, мы показали, что определения преобразований Лоренца (42) и (43) полностью эквивалентны.

В дальнейшем нам понадобится следующее полезное *утверждение*: если Λ — преобразование Лоренца, т. е. матрица, удовлетворяющая соотношению (43), то матрицы Λ^T , Λ^{-1} , Λ^{-1T} — тоже преобразования Лоренца, т. е.

$$\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \Lambda g \Lambda^T = g, \quad \Lambda^{-1T} g \Lambda^{-1} = g, \quad \Lambda^{-1} g \Lambda^{-1T} = g. \quad (44)$$

Доказательство. Пусть Λ — матрица, удовлетворяющая соотношению (43). Применив операцию “ -1 ” к обеим частям этого равенства, с учетом $g^{-1} = g$ получим последнее соотношение (44). Из него и из (43) можно получить еще два соотношения, умножая обе части равенства слева и справа на такие матрицы, которые сокращают множители с Λ в левой части, перенося их тем самым в правую часть. Это и приведет к двум другим равенствам (44), тем самым они доказаны.

Деление на классы. Дискретные преобразования. При изучении ортогональных преобразований $x' = \omega x$ мы видели, что они делятся на два класса: преобразования с $\det \omega = 1$ ("повороты") и преобразования с $\det \omega = -1$ ("повороты с отражением"). Аналогом этого для группы Лоренца является деление на четыре класса. Оно осуществляется по двум признакам: по знаку $\det \Lambda$ и по знаку матричного элемента Λ_{00} . Поясним: если взять $\det$ матричного равенства (43), получим $(\det \Lambda)^2 = 1$, т. е. $\det \Lambda = \pm 1$, так что по знаку $\det \Lambda$ преобразования Лоренца делятся на два класса, как и ортогональные преобразования трехмерных координат. Но теперь есть еще один признак деления на классы: взяв матричный элемент 00 равенства (43), получим $1 = g_{00} = (\Lambda^T g \Lambda)_{00} = (\Lambda^T)_{0\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\beta 0} = (\Lambda^T)_{00} \Lambda_{00} - (\Lambda^T)_{0i} \Lambda_{i0} = \Lambda_{00}^2 - \Lambda_{i0} \Lambda_{i0}$, откуда следует $\Lambda_{00}^2 = 1 + \Lambda_{i0} \Lambda_{i0} \geq 1$. Таким образом, для любого преобразования Лоренца либо $\Lambda_{00} \geq 1$, либо $\Lambda_{00} \leq -1$, т. е. по знаку Λ_{00} они также делятся на два непересекающихся класса. Тем самым по двум признакам (знак $\det \Lambda$ и знак Λ_{00}) мы получаем четыре возможных класса.

Итак, мы указали два признака, по которым все преобразования Лоренца делятся на четыре класса. Строгий анализ показывает, что других подобных признаков нет, т. е. любые два преобразования Лоренца из одного из этих четырех классов могут быть переведены друг в друга непрерывным изменением параметров. Доказательство этого утверждения мы предоставляем заинтересованному читателю, а с практической точки зрения достаточно знать, что утверждение верно.

Дискретные преобразования. В группе ортогональных преобразований деление на классы соответствовало наличию или отсутствию в данном преобразовании операции отражения пространственных осей P . Аналогично обстоит дело и в группе Лоренца, только теперь помимо пространственного отражения P имеется также операция отражения времени T и "полное отражение" — произведение PT . Для пространственного отражения $x'_0 = x_0$, $x'_i = -x_i$, для временного $x'_0 = -x_0$, $x'_i = x_i$, для полного $x'_0 = -x_0$, $x'_i = -x_i$ (в матричной записи $P = g$, $T = -g$, $PT = -1$). Все эти дискретные операции удовлетворяют, очевидно, соотношению (43), т. е. являются преобразованиями Лоренца. Вместе с тождественным преобразованием "1" мы имеем четыре матрицы, каждая из которых принадлежит одному из обсуждавшихся выше четырех классов преобразований Лоренца:

$$\begin{aligned}
1: & \quad \det \Lambda = 1, \quad \Lambda_{00} > 0; \\
P: & \quad \det \Lambda = -1, \quad \Lambda_{00} > 0; \\
T: & \quad \det \Lambda = -1, \quad \Lambda_{00} < 0; \\
PT: & \quad \det \Lambda = 1, \quad \Lambda_{00} < 0.
\end{aligned}
\tag{45}$$

Определение: преобразования первого класса с $\det \Lambda = 1$ и $\Lambda_{00} > 0$ называют “собственными преобразованиями Лоренца”. *Утверждение:* они образуют группу, т. е. произведение двух собственных преобразований — также собственное преобразование. Предлагаем читателю, при желании, доказать это самостоятельно (неочевидна лишь положительность Λ_{00} для произведения двух преобразований с $\Lambda_{00} > 0$).

Таким образом, собственные преобразования являются подгруппой в группе всех преобразований Лоренца, подобно простым поворотам в группе O_3 . Ясно, что преобразования из других трех классов являются произведениями некоторого собственного преобразования Лоренца и одного из трех отражений: P , T или PT . В этом отношении очевидна полная аналогия с делением на классы ортогональных преобразований группы O_3 . В дальнейшем мы будем ограничиваться изучением только собственных преобразований Лоренца.

2.6 Собственные преобразования Лоренца. Явный вид преобразований перехода к движущейся системе отсчета

В класс собственных преобразований Лоренца входят, очевидно, простые повороты пространственных осей, т. е. преобразования вида

$$x'_0 = x_0, \quad x'_i = \omega_{ik} x_k, \tag{46}$$

где ω — ортогональная 3×3 матрица с $\det \omega = 1$. Соответствующая 4×4 матрица Λ имеет блочную структуру ($\Lambda_{00} = 1$, $\Lambda_{0i} = 0$, $\Lambda_{i0} = 0$, $\Lambda_{ik} = \omega_{ik}$) и является собственным преобразованием Лоренца, так как равенство (42) для такой матрицы очевидным образом выполняется.

Обратимся теперь к преобразованиям второго типа — переход к движущейся системе без изменения ориентации пространственных осей. Информация об этом вносится тем, что все элементы матрицы Λ в (37) ищутся в

виде функций от одного трехмерного вектора v , имеющего смысл скорости новой системы M' относительно исходной системы M .

Соотношения (37) в более подробной записи принимают вид (41). Воспользуемся теперь сформулированным на с. 50 принципом 4 ("сохранение O_3 -свойств"): в любой инерциальной системе временная переменная x_0 — истинный скаляр, а пространственные координаты x_i — истинный вектор. Ввиду произвольности x эти утверждения справедливы, очевидно, для любого из вкладов в правых частях соотношений (41). Отсюда, используя лемму "о свертке неизвестного с известным" (см. п. 2.2), из соотношений (41) заключаем, что по группе O_3 элемент Λ_{00} — скаляр, Λ_{0i} и Λ_{i0} — векторы, а Λ_{ik} — тензор ранга 2, причем все они истинные.

Поставим теперь вопрос: как можно построить такие объекты из одного истинного трехмерного вектора — скорости v (и, естественно, символов δ_{ik} и ε_{ikl} , возможность присутствия которых всегда подразумевается)? Ответ ясен: всякий скаляр — некоторая функция от v^2 , всякий вектор есть v_i со скалярным коэффициентом, а истинный тензор второго ранга есть линейная комбинация δ_{ik} и $v_i v_k$ со скалярными коэффициентами. Если бы мы не требовали "истинности" тензора, то была бы допустима еще одна структура $\varepsilon_{ikl} v_l$. Но это псевдотензор, а псевдоскалярного коэффициента при ней из одного вектора v построить невозможно. [Контрольный вопрос: чему равно минимальное число истинных векторов, из которых можно построить псевдоскаляр? Ответ — 3.]

Из сказанного выше следует, что мы можем ввести следующую параметризацию для элементов матрицы Λ в (41):

$$\Lambda_{00} = a, \quad \Lambda_{0i} = \alpha v_i, \quad \Lambda_{i0} = \beta v_i, \quad \Lambda_{ik} = \lambda \delta_{ik} + \mu v_i v_k, \quad (47)$$

где $a, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ — неизвестные скалярные коэффициенты — некоторые функции одной переменной v^2 .

Подставив (47) в соотношения (41), получим:

$$x'_0 = ax_0 + \alpha(vx), \quad x'_i = \beta x_0 v_i + \lambda x_i + \mu v_i(vx), \quad (48)$$

где $(vx) = v_k x_k$ здесь и далее — скалярное произведение трехмерных векторов v и x .

Следующая задача — получить уравнения, из которых можно явно найти пять неизвестных скалярных коэффициентов в (47). Одно из таких уравнений получается сразу же из определения величины v как скорости новой системы M' по отношению к исходной системе M . Отсюда следует,

что если при $t = 0$ системы были совмещены, то в дальнейшем центр системы M' в терминах координат системы M движется по траектории $x_i = v_i t = v_i x_0 / c$, чему должно соответствовать $x'_i = 0$ в системе M' . Подставив во второе равенство (48) $x_i = v_i x_0 / c$ и потребовав $x'_i = 0$, имеем $0 = \beta x_0 v_i + \lambda v_i x_0 / c + \mu v_i v^2 x_0 / c$, откуда после сокращения общего множителя $x_0 v_i$ получаем

$$0 = \beta + \lambda / c + \mu v^2 / c. \quad (49)$$

Это одно из уравнений на пять неизвестных скалярных коэффициентов в соотношениях (48).

Для получения других уравнений мы располагаем лишь “требованием постоянства интервала” (42), которое можно переписать в виде

$$x_0^2 - x_i x_i = (x'_0)^2 - x'_i x'_i.$$

Отсюда при подстановке (48) получаем:

$$x_0^2 - x_i x_i = [a x_0 + \alpha(vx)]^2 - [\beta x_0 v_i + \lambda x_i + \mu v_i(vx)]^2. \quad (50)$$

Квадрат второй скобки [...] в правой части понимается как квадрат линейной комбинации трехмерных векторов, т. е. сумма квадратов каждого из слагаемых плюс сумма всех их удвоенных скалярных произведений.

Ввиду произвольности x из соотношения (50) можно получить несколько уравнений на искомые скалярные коэффициенты. Рассматривая две части равенства (50) как полиномы второго порядка по переменной x_0 и приравнявая последовательно коэффициенты при нулевой, первой и второй степенях x_0 в обеих частях, получаем следующие три равенства:

$$-x^2 = \alpha^2(vx)^2 - \lambda^2 x^2 - \mu^2 v^2(vx)^2 - 2\mu\lambda(vx)^2, \quad (51.1)$$

$$0 = 2a\alpha(vx) - 2\beta\lambda(vx) - 2\beta\mu v^2(vx), \quad (51.2)$$

$$1 = a^2 - \beta^2 v^2. \quad (51.3)$$

Последнее уравнение не содержит x , во втором $2(vx)$ — общий множитель, который можно сократить. В первое уравнение (51.1) входят две различные структуры: квадрат трехмерного вектора x^2 и квадрат скалярного произведения $(vx)^2$. Ясно, что они независимы, так как длину трехмерного вектора x можно менять, не изменяя скалярного произведения (vx) , и наоборот. Поэтому мы имеем право приравнять коэффициенты при этих двух независимых структурах в обеих частях равенства (51.1), что даст

два уравнения. В итоге из (51) получим следующие четыре уравнения на скалярные коэффициенты в (48):

$$\begin{aligned} -\lambda^2 &= -1, \\ \alpha^2 - \mu^2 v^2 - 2\mu\lambda &= 0, \\ a\alpha - \beta\lambda - \beta\mu v^2 &= 0, \\ a^2 - \beta^2 v^2 &= 1. \end{aligned} \quad (52)$$

Эти соотношения вместе с (49) образуют систему из пяти уравнений для определения пяти неизвестных скалярных коэффициентов $a, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ в (48). При ее решении приходится несколько раз извлекать квадратные корни, что подразумевает произвол ± 1 . Для фиксации знаков нужно учитывать, что мы ищем собственные преобразования Лоренца, для которых матрица $\Lambda(v)$ при $v = 0$ должна переходить в единицу. Тогда решение однозначно и имеет следующий вид:

$$\alpha = \beta = -a/c, \quad \lambda = 1, \quad \mu = (a - 1)/v^2, \quad (53)$$

где

$$a = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}. \quad (54)$$

В этом легко убедиться прямой проверкой, что мы предоставляем сделать читателю.

Подставляя (53) в (48), получаем искомые формулы преобразования четырехмерных координат:

$$x'_0 = a[x_0 - (vx)/c], \quad (55.1)$$

$$x'_i = x_i - (a/c)v_i x_0 + [(a - 1)/v^2](vx)v_i \quad (55.2)$$

с параметром a из (54).

Если от $x_0 = ct$ вернуться к простой переменной t , то соотношения (55) примут следующий вид:

$$t' = a[t - (vx)/c^2], \quad (56.1)$$

$$x'_i = x_i - av_i t + [(a - 1)/v^2](vx)v_i. \quad (56.2)$$

При $c \rightarrow \infty$ из (54) имеем $a \rightarrow 1$ и соотношения (56) переходят, очевидно, в формулы преобразований Галилея (36) с $\omega = 1$, как и требуется. Часто бывают полезными формулы обратных преобразований, выражающих “нештрихованные” величины через “штрихованные”.

Правило: формулы обратных преобразований получаются из формул прямых преобразований простой перестановкой “штрихованных” величин с “нештрихованными” с одновременной заменой $v \rightarrow -v$. Утверждение очевидно, поскольку в логическом отношении между системами M и M' имеется полная симметрия, только с изменением знака скорости: если система M' движется по отношению к системе M со скоростью v , то система M по отношению к M' — со скоростью $-v$.

Руководствуясь сформулированным общим принципом, получаем следующие формулы обратных к (56) преобразований:

$$t = a[t' + (vx')/c^2], \quad (57.1)$$

$$x_i = x'_i + av_it' + [(a - 1)/v^2](vx')v_i. \quad (57.2)$$

Определенный соотношением (54) коэффициент a при замене $v \rightarrow -v$ не изменяется.

Формулы преобразований (56) существенно упрощаются, если вектор скорости v перпендикулярен или параллелен вектору трехмерных координат x . В первом случае ($v \perp x$) имеем $(vx) = 0$, поэтому из (56) $t' = at$, $x'_i = x_i - av_it$. Во втором случае ($v \parallel x$) справедливо соотношение

$$(vx)v_i/v^2 = x_i, \quad (58)$$

подстановка которого в (56) дает $t' = a[t - (vx)/c^2]$, $x'_i = a[x_i - v_it]$.

Обозначим рассмотренные выше преобразования перехода к движущейся системе отсчета через $\Lambda(v)$, а обсуждавшиеся в начале раздела простые повороты через $\Lambda(\omega)$. Каждое из них является собственным преобразованием Лоренца, т. е. для них $\det \Lambda = 1$ и $\Lambda_{00} > 0$, поэтому их произведения $\Lambda(\omega)\Lambda(v)$ — также собственное преобразование, так как последние образуют группу (см. выше). Справедливо и обратное утверждение: всякое собственное преобразование Лоренца может быть представлено в виде произведения $\Lambda(\omega)\Lambda(v)$ с некоторыми ω и v . Простые повороты $\Lambda(\omega)$ образуют подгруппу, а для преобразований $\Lambda(v)$ это не так, поскольку произведение двух таких преобразований будет преобразованием того же типа только тогда, когда векторы v для них коллинеарны (т. е. направлены по одной прямой), а в общем случае произведение двух преобразований типа $\Lambda(v)$ сводится к преобразованию $\Lambda(\omega)\Lambda(v)$ с некоторой новой скоростью v и некоторым поворотом ω .

2.7 Релятивистский закон сложения скоростей.

Сокращение масштабов и растяжение времени

Сложение скоростей. Пусть точка в системе M' движется со скоростью u , т. е. по траектории $x'_i = u_i t'$, а сама система M' движется относительно исходной системы M со скоростью v . Вопрос: чему равна скорость движения данной точки для наблюдателя из системы M ?

Ответ легко получить из формул преобразования Лоренца. Подставив $x'_i = u_i t'$ в соотношения обратных преобразований (57), находим соответствующие значения x_i и t :

$$t = a[t' + (vu)t'/c^2] = at'[1 + (vu)/c^2],$$
$$x_i = t'[u_i + av_i + (a - 1)(vu)v_i/v^2].$$

Из первого равенства видно, что величина t' пропорциональна t , поэтому из второго равенства следует, что $x_i = w_i t$, где

$$w_i = \frac{[u_i + av_i + (a - 1)(vu)v_i/v^2]}{a[1 + (vu)/c^2]} \quad (59)$$

— искомая скорость точки в системе M . При $c \rightarrow \infty$ и (как следствие) $a \rightarrow 1$ из (59) получаем классический закон сложения скоростей $w_i = u_i + v_i$.

Соотношение (59) упрощается, если две скорости u и v либо взаимно перпендикулярны, либо параллельны. В первом случае $(vu) = 0$ и тогда

$$w_i = v_i + u_i/a,$$

а во втором при учете аналогичного (58) соотношения для проекций на общее направление векторов u и v получаем

$$w = \frac{u + av + (a - 1)u}{a[1 + uv/c^2]} = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}.$$

Легко проверить, что при подстановке в эту формулу $u = \pm c$ получим $w = \pm c$ независимо от величины v в соответствии с постулатом постоянства скорости света. Конечно, из общего соотношения (59) при произвольных направлениях скоростей из $|u| = c$ должно следовать $|w| = c$ при любой скорости v . Проверку этого утверждения предоставляем заинтересованному читателю.

Одновременность, сокращение масштабов. Точку в четырехмерном пространстве-времени принято называть “событием”. Задание события — это указание места и времени.

Всякая материальная точка, любым образом перемещающаяся в трехмерном пространстве, с точки зрения четырехмерного пространства-времени “тянет за собой цепь событий”, прочерчивая так называемую “мировую линию”, т. е. непрерывно зависящую от времени t совокупность всех событий с координатами $\{t, x_i(t)\}$. Если точка в трехмерном пространстве неподвижна, то ее мировая линия в четырехмерном пространстве есть прямая, параллельная оси времени t ; если же точка движется равномерно и прямолинейно, то ее мировая линия — прямая, наклоненная по отношению к оси t , угол наклона определяется скоростью движения.

Рассматривая трехмерное пространство координат, мы можем воспринимать его точки чисто геометрически. Но для количественного описания положения точки приходится вводить систему отсчета. Координаты x_i , $i = 1, 2, 3$ являются тогда представителем данной геометрической точки в выбранной системе отсчета. В повернутой системе та же самая геометрическая точка имеет уже иные координаты $x' = \omega x$, но при этом мы всегда имеем в виду, что это всего лишь разные представители одной и той же геометрической точки.

Точно так же надо смотреть и на формулы преобразований Лоренца: существуют объективные четырехмерные геометрические точки — “события”, но их “представители”, т. е. четырехмерные координаты, будут разными в разных системах отсчета. Формулы преобразований Лоренца дают явную связь между этими координатами в точной аналогии с преобразованием поворота $x' = \omega x$. Наблюдатели из разных систем приписывают разные четырехмерные координаты $x_\alpha(A)$ одному и тому же событию “ A ” точно так же, как пользующиеся разными системами отсчета в трехмерном пространстве наблюдатели приписывают разные координаты x_i одной и той же геометрической точке.

Поскольку время теперь — всего лишь одна из четырех координат, ясно, что никакого объективного понятия одновременности событий не существует. Если A и B — два события и $x_\alpha(A)$ и $x_\alpha(B)$ — их четырехмерные координаты в некоторой системе, то в ней события считаются одновременными при $x_0(A) = x_0(B)$. Но в другой системе отсчета те же самые события имеют другие координаты $x'_\alpha(A)$ и $x'_\alpha(B)$ и в общем случае $x'_0(A) \neq x'_0(B)$, т. е. с точки зрения наблюдателя из новой системы эти же самые события уже не одновременны.

Точно так же не существует и объективного понятия пространственного расстояния между двумя событиями. Если две материальные точки a и b неподвижны в некоторой системе координат, то разделяющий их вектор (модуль которого = расстояние) есть разность $x_i(a) - x_i(b)$. При преобразованиях Галилея (36) без поворота осей каждое из слагаемых получает одинаковую добавку $-v_i t$, которая в разности $x_i(a) - x_i(b)$ сокращается, так что эта величина с точки зрения преобразований Галилея объективна.

Для преобразований Лоренца это уже не так. Допустим, что некоторый объект, для простоты “стержень” с концами a, b , покоится в исходной системе координат M и $\Delta x_i = x_i(a) - x_i(b)$ — пространственный вектор разности координат его концов в данной системе. С точки зрения четырехмерного пространства-времени концы покоящегося стержня a, b прочерчивают две мировые линии — прямые, параллельные оси времени. Тогда измерение разности координат Δx_i концов стержня можно выполнить следующим образом: выбираем произвольно точки A и B (= “события”) на этих мировых линиях и составляем разность трехмерных координат $\Delta x_i = x_i(A) - x_i(B)$. Ответ, очевидно, не зависит от выбора точек A и B , так как координаты левого конца можно измерить, например, сегодня, а второго — завтра, разность от этого не зависит.

Рассмотрим теперь ту же самую задачу с точки зрения наблюдателя системы M' , движущейся со скоростью v по отношению к системе M , в которой стержень неподвижен. В системе M' мировые линии концов стержня также параллельные прямые, но теперь наклоненные по отношению к оси времени t' . Поэтому наблюдатель в M' , желая определить разность пространственных координат концов стержня в своей системе, уже не может брать произвольно по одной точке на каждой из двух мировых линий, поскольку очевидно, что теперь ответ от этого выбора зависит. Естественным требованием на выбор этих точек A, B для наблюдателя в системе M' является требование одновременности (с его точки зрения) измерения пространственных координат концов стержня, т. е. условие $t'(A) = t'(B)$, и он назовет искомым пространственным вектором в своей системе величину $\Delta x'_i = x'_i(A) - x'_i(B)$.

Обозначая разность значений любых величин для событий A и B символом Δ , поставим задачу можно сформулировать следующим образом: пусть дана величина Δx_i и дано, что $\Delta t' = 0$, — требуется найти величину $\Delta x'_i$.

Ответ сразу же получается из формул преобразований Лоренца (56), которые ввиду их линейности переносятся без изменений и на приращения

ΔX соответствующих величин X :

$$\begin{aligned}\Delta t' &= a[\Delta t - (v\Delta x)/c^2], \\ \Delta x'_i &= \Delta x_i - av_i\Delta t + [(a-1)/v^2](v\Delta x)v_i.\end{aligned}\tag{60}$$

По условию, у нас $\Delta t' = 0$, поэтому из первого равенства (60) находим $\Delta t = (v\Delta x)/c^2$, что после подстановки во второе равенство (60) дает

$$\Delta x'_i = \Delta x_i - av_i(v\Delta x)/c^2 + [(a-1)/v^2](v\Delta x)v_i.$$

Два последних вклада — подобные члены и при их сложении с учетом определения (54) параметра a окончательно получаем:

$$\Delta x'_i = \Delta x_i - [(a-1)/av^2](v\Delta x)v_i.\tag{61}$$

Таким образом, наблюдателю из движущейся системы M' стержень кажется в общем случае иначе ориентированным в пространстве и имеющим иную длину, чем наблюдателю из системы M , в которой стержень неподвижен.

Формула (61) упрощается, если стержень перпендикулярен скорости v или параллелен ей. В первом случае $(v\Delta x) = 0$ и $\Delta x'_i = \Delta x_i$, т. е. никаких изменений не происходит. Во втором случае по аналогии с (58) $v_i(v\Delta x)/v^2 = \Delta x_i$ и тогда

$$\Delta x'_i = \Delta x_i - \Delta x_i(a-1)/a = \Delta x_i/a = \Delta x_i[1 - v^2/c^2]^{1/2},$$

т. е. стержень ориентации не меняет, но представляется короче для наблюдателя из системы M' . Именно этот эффект и называют “сокращением масштаба” при переходе к движущейся системе.

“Растяжение времени”. Пусть есть две системы отсчета M и M' , условно M — наблюдатель на Земле, M' — наблюдатель в движущейся со скоростью v по отношению к Земле ракете. Пусть в этой ракете идет некоторый процесс, например, ее пилот в какой-то момент включил секундомер, а потом его выключил. Моменты включения и выключения — два события A и B , и наблюдатель в ракете по своему секундомеру видит, чему равно прошедшее у него время $\Delta t'$. Мы хотим узнать, чему равен соответствующий интервал времени Δt в системе M . Для получения ответа, как и в предыдущей задаче, нужно учитывать дополнительное условие. Теперь оно состоит в том, что наш “процесс” происходит в одной и той же пространственной точке системы M' , т. е. $\Delta x'_i = 0$. Итак, нам дана величина

$\Delta t'$ и дано, что $\Delta x'_i = 0$, откуда требуется найти величину Δt . Ответ получается немедленно из формулы обратных преобразований (57.1) с заменой всех величин X на ΔX :

$$\Delta t = a\Delta t' = \Delta t'[1 - v^2/c^2]^{-1/2}. \quad (62)$$

Таким образом, “собственное время” $\Delta t'$ для движущегося в ракете наблюдателя меньше, чем соответствующее время Δt для “неподвижного наблюдателя” на Земле. Но при этом надо иметь в виду, что речь идет только об инерциальных системах M и M' , которые полностью симметричны, так что суждение о том, “какое из двух времен больше” относительно, т. е. зависит от выбора “наблюдателя”.

2.8 Тензоры и тензорные поля на группе Лоренца

Термин “тензор” в этом разделе всегда будет пониматься как “тензор на группе Лоренца”, это уточнение в дальнейшем для краткости опускаем. Конкретное преобразование Лоренца задается 4×4 матрицей Λ , описывающей преобразование четырехмерных координат (37), что также всегда будет просто подразумеваться. Напомним также, что четырехмерные индексы с цифровыми значениями 0, 1, 2, 3 мы условились обозначать греческими буквами и все такие индексы пока что ставим снизу, пользуясь стандартными обозначениями линейной алгебры, — в таких обозначениях доказательство некоторых приводимых ниже важных утверждений выглядит проще и нагляднее. Впоследствии мы перейдем к традиционным обозначениям с верхними и нижними индексами.

Определение тензоров. Простейший тензор — скаляр — одна величина φ , которая не меняется при преобразованиях Лоренца: $\varphi' = \varphi$. Следующий по сложности объект есть вектор — тензор ранга 1, т. е. величина A_α с одним индексом. Именно на этом этапе проявляется существенное различие между группой Лоренца и группой ортогональных преобразований трехмерных координат, которую мы обсуждали ранее. В п. 2.3 было показано, что если координаты преобразуются линейно некоторой матрицей L , то производные по координатам преобразуются матрицей L^{-1T} (см. соотношение (34)). В случае ортогональных преобразований с $L = \omega$ мы имели $\omega^{-1T} = \omega$, т. е. координаты и производные преобразовывались одинаково и оба этих объекта поэтому можно было обозначать одним

термином “вектор”. Для группы Лоренца это не так, поскольку матрицы Λ в общем случае не ортогональны и для них $\Lambda^{-1\top} \neq \Lambda$, т. е. координаты x_α и производные $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x_\alpha$ преобразуются по-разному. Поэтому теперь вводятся два типа векторов: “контравариантные” и “ковариантные”. *Определение:* контравариантным называется вектор A_α , который преобразуется как координаты, а ковариантным — как производные по координатам, т. е.

$$A' = \Lambda A \text{ (контравар.) и } A' = \bar{\Lambda} A \text{ (ковар.)}. \quad (63)$$

Здесь и везде в дальнейшем для краткости используется обозначение

$$\Lambda^{-1\top} \equiv \bar{\Lambda} \quad (64)$$

для матрицы преобразования производных ∂ , а под Λ всегда понимается матрица преобразования координат в (37).

Таким образом, по определению, координаты x_α — контравариантный вектор, а производные ∂_α — ковариантный.

Определение: тензором ранга n называют величину с n индексами и с указанием типа каждого из них (“ко.” или “контр.”), которая по каждому из индексов преобразуется как соответствующий вектор.

Сейчас нет смысла пытаться написать вытекающий из этого определения закон преобразования для произвольного тензора, поэтому мы ограничимся случаем тензоров $T_{\alpha\beta}$ ранга 2. Такие объекты можно понимать и как обычные матрицы 4×4 . Поскольку для каждого из индексов есть два варианта выбора типа (“ко.” или “контр.”), для $T_{\alpha\beta}$ будет 4 варианта такого выбора. Мы приведем закон преобразования для каждого из них, указывая рядом в скобках [...] матричный эквивалент значковой записи:

$$\text{“контр.” — “контр.” : } T'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} T_{\mu\nu}, \quad [T' = \Lambda T \Lambda^\top], \quad (65.1)$$

$$\text{“ко.” — “ко.” : } T'_{\alpha\beta} = \bar{\Lambda}_{\alpha\mu} \bar{\Lambda}_{\beta\nu} T_{\mu\nu}, \quad [T' = \bar{\Lambda} T \bar{\Lambda}^\top], \quad (65.2)$$

$$\text{“контр.” — “ко.” : } T'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\mu} \bar{\Lambda}_{\beta\nu} T_{\mu\nu}, \quad [T' = \Lambda T \bar{\Lambda}^\top], \quad (65.3)$$

$$\text{“ко.” — “контр.” : } T'_{\alpha\beta} = \bar{\Lambda}_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} T_{\mu\nu}, \quad [T' = \bar{\Lambda} T \Lambda^\top]. \quad (65.4)$$

Принцип записи прост: индексу типа “контр.” сопоставляется матрица преобразования Λ , а индексу типа “ко.” — матрица $\bar{\Lambda}$.

Тензорные свойства $g_{\alpha\beta}$ и $\delta_{\alpha\beta}$. *Утверждение:* определенная однозначно для всех систем соотношением (38) величина $g_{\alpha\beta}$ является тензором, который можно считать как контравариантным, так и ковариантным по

обоим индексам (но не смешанным!). Другими словами, постоянство g для всех систем совместно с соответствующим тензорным законом преобразования как (65.1), так и (65.2). Действительно, если оба индекса “контр.”, то $g' = \Lambda g \Lambda^T$ согласно (65.1), а если оба индекса “ко.”, то $g' = \bar{\Lambda} g \bar{\Lambda}^T$ согласно (65.2). Нам надо показать, что в обоих случаях $g' = g$, т. е. $\Lambda g \Lambda^T = g$ и $\bar{\Lambda} g \bar{\Lambda}^T = \Lambda^{-1T} g \Lambda^{-1} = g$. Эти равенства справедливы, что уже известно из доказанных ранее соотношений (44). Для законов преобразования (65.3) или (65.4) равенство $g' = g$ сводится к требованию коммутативности матрицы g с Λ или Λ^T и в общем случае не выполняется, т. е. “смешанным тензором” g считать нельзя.

Таковым является другой объект — определенный одинаково для всех систем символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$, соответствующий единичной матрице. *Утверждение:* символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ — “смешанный тензор”, причем любого из двух типов “контр.” — “ко.” или “ко.” — “контр.”. Действительно, закон преобразования (65.3) для единичной матрицы принимает вид $1' = \Lambda \cdot 1 \cdot \bar{\Lambda}^T = \Lambda \Lambda^{-1} = 1$, а из (65.4) получаем $1' = \bar{\Lambda} \cdot 1 \cdot \Lambda^T = \Lambda^{-1T} \Lambda^T = 1$, что и требуется. Но для преобразований (65.1) и (65.2) равенство $1' = 1$ не выполняется.

Замечание: для группы Лоренца по аналогии с символом ε_{ikl} для группы вращений можно ввести четырехзначковый полностью антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$. Но в дальнейшем он нам не понадобится, и мы не будем уточнять (впрочем, очевидное) его определение.

Смена типа вектора. *Утверждение:* если A — контравариантный вектор, то $B = gA$ — ковариантный и наоборот. Доказательство: пусть A — контравариантный вектор, т. е. $A' = \Lambda A$ согласно (63). Тогда $B' = gA' = g\Lambda A = g\Lambda g^2 A = g\Lambda g B$, т. е. вектор B преобразуется матрицей $g\Lambda g$ (учтено равенство $g^2 = 1$). Остается показать, что эта матрица совпадает с Λ^{-1T} . Это немедленно следует из определения преобразований Лоренца (43), если умножить данное матричное равенство слева на Λ^{-1T} , а справа — на g . Обратное утверждение (если A — “ко.”, то B — “контр.”) доказывается аналогично.

Для простоты и наглядности мы сейчас говорили только о векторах, но в дальнейшем аналогичная процедура будет использоваться для смены типа любого из индексов в произвольном тензоре.

О свертке. *Утверждение:* свертка $\varphi \equiv A_\alpha B_\alpha \equiv (A, B)$ двух векторов является “правильным объектом” — скаляром тогда и только тогда, когда сворачиваются векторы разного типа — “ко.” и “контр.”. Действительно, пусть вектор A типа “ко.”, а B — типа “контр.”, тогда $\varphi' = (A', B') =$

$(\bar{\Lambda}A, \Lambda B) = (A, \bar{\Lambda}^T \Lambda B) = (A, \Lambda^{-1} \Lambda B) = (A, B) = \varphi$. Если вектор A типа “контр.”, а B — типа “ко.”, ответ будет тем же: $\varphi' = \varphi$. Но если оба вектора одного типа, например, “контр.” — “контр.”, то тогда $\varphi' \equiv (A', B') = (\Lambda A, \Lambda B) = (A, \Lambda^T \Lambda B) \neq (A, B) \equiv \varphi$, поскольку в общем случае Λ — не ортогональные матрицы, т. е. $\Lambda^T \Lambda \neq 1$. Также будет и в случае двух векторов одного типа “ко.” — “ко.”.

Сейчас мы рассматривали простые векторы, но общий принцип переносится на свертки в любых тензорах: для получения “правильного объекта”, т. е. тензора по остающимся свободным значкам необходимо сворачивать индексы разного типа — “ко.” с “контр.”.

Смена обозначений. Верхние и нижние индексы. С этого момента мы переходим к новым обозначениям, традиционным для тензоров на группе Лоренца. *Соглашения:*

1. Контравариантные индексы будем писать сверху, ковариантные — снизу, так что положение индекса указывает его тип без добавочных словесных пояснений. Например, четырехмерные координаты будем теперь обозначать x^α , производные по ним — ∂_α , метрический тензор — через $g^{\alpha\beta}$ или $g_{\alpha\beta}$ (численно это одна и та же величина), а символ Кронекера — через δ_α^β или $\delta^{\alpha\beta}$ в соответствии с природой этих объектов.

2. Формулы преобразований Лоренца (63) для векторов разного типа будем теперь записывать следующим образом:

$$A'^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha A^\beta \text{ (“контр.”) }, \quad A'_\alpha = \bar{\Lambda}_\alpha^\beta A_\beta \text{ (“ко.”) }. \quad (66)$$

Это просто изменение обозначений: раньше мы ставили все индексы снизу и понимали $\Lambda_{\alpha\beta}$ и $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}$ как матричные элементы матриц Λ и $\bar{\Lambda}$. В записи (66) для тех же самых матричных элементов введены новые обозначения: $\Lambda_{\alpha\beta} \equiv \Lambda_\beta^\alpha$, $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta} \equiv \bar{\Lambda}_\alpha^\beta$, которые более естественны при наших новых соглашениях.

3. Тип тензора любого ранга теперь указывается просто положением каждого из его индексов (верхнее или нижнее), а закон преобразования определяется простым правилом: “как соответствующий вектор по каждому из индексов”. В качестве примера приведем новый вариант записи соотношений (65):

$$\begin{aligned} T'^{\alpha\beta} &= \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T^{\mu\nu}, & T'_{\alpha\beta} &= \bar{\Lambda}_\alpha^\mu \bar{\Lambda}_\beta^\nu T_{\mu\nu}, \\ T'^\alpha{}_\beta &= \Lambda_\mu^\alpha \bar{\Lambda}_\beta^\nu T^\mu{}_\nu, & T'^\alpha{}_\beta &= \bar{\Lambda}_\alpha^\mu \Lambda_\nu^\beta T^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (67)$$

Еще два примера для тензоров ранга 3:

$$T'^{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \Lambda_{\lambda}^{\gamma} T^{\mu\nu\lambda}, \quad T'^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \bar{\Lambda}_{\beta}^{\mu} \Lambda_{\lambda}^{\gamma} T^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}.$$

Принцип записи прост: верхним индексам соответствует матрица Λ , нижним — $\bar{\Lambda}$, расстановка индексов — по правилам (66).

Операции с тензорами. Опускание и подъем индексов. Как и в случае группы вращений, ясно, что сумма тензоров одной природы и произведение тензора на скаляр — тензор той же природы. Ясно также, что непосредственно обобщается понятие тензорного произведения двух тензоров: например, если A — ковариантный вектор, а B — контравариантный, то их тензорное произведение, т. е. двухзначковый объект $A_{\alpha} B^{\beta}$ — тензор ранга 2 указанного положением значков типа.

Нетривиально лишь обобщенные понятия свертки. Напомним, что для группы вращений свертка определялась следующим образом: какие-нибудь два индекса тензора полагались равными и производилось суммирование по всем возможным цифровым значениям 1, 2, 3 этого общего индекса (что технически обозначалось его повторением). Утверждение состояло в том, что полученная таким образом величина является тензором по оставшимся свободным индексам.

Эта конструкция переносится и на группу Лоренца с одной существенной оговоркой: “правильный объект”, т. е. тензор по оставшимся значкам мы получим только в том случае, если будем сворачивать значки разного типа, т. е. “верхний с нижним”. При попытке свернуть значки одинаковой природы мы получим, конечно, некоторую величину со значками (на два меньше, чем в исходном объекте), но она не будет преобразовываться как тензор по оставшимся значкам.

Мы уже доказывали это ранее на простом примере свертки двух векторов. Но ясно, что приведенное там доказательство переносится непосредственно на общий случай произвольного тензора. Это очевидно, поскольку в доказательстве “игра идет” только с теми двумя матрицами Λ , $\bar{\Lambda}$, которые в законе преобразования тензора соответствуют двум сворачиваемым индексам, и не затрагивает прочие множители Λ , $\bar{\Lambda}$, соответствующие оставшимся свободным индексам.

Во всех общих соотношениях релятивистской формулировки электродинамики мы будем иметь дело с “правильными объектами” — тензорами на группе Лоренца (идейным обоснованием является принцип относительности, о чем говорилось в п. 2.4). Чтобы не выходить из этого класса,

достаточно руководствоваться следующими двумя простыми *правилами записи формул*:

1. Любой из свободных греческих индексов должен занимать одинаковое положение (верхнее или нижнее) во всех слагаемых одного выражения и в обеих частях любого равенства.

2. Все свертки должны быть “косыми”, т. е. один из сворачиваемых индексов должен быть верхним, а другой — нижним, их порядок (т. е. какой из них первый, а какой — второй) значения не имеет.

Перемещение индексов. Ранее было показано, что если A — контравариантный вектор, то $B = gA$ — ковариантный и наоборот. Теперь при новых соглашениях у нас появляется возможность различать A и B не буквами, а просто положением индекса: $A \rightarrow A^\alpha$, $B \rightarrow A_\alpha$ (или наоборот). Тем самым вводятся операции опускания и подъема индексов у вектора, которые будем записывать в виде

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta, \quad A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta, \quad (68)$$

пользуясь тем, что метрический тензор g можно понимать и как $g^{\alpha\beta}$, и как $g_{\alpha\beta}$. Запись (68) удовлетворяет двум сформулированным выше общим правилам.

Теперь можно сделать следующий важный шаг, а именно: будем считать величины A^α и A_α не разными объектами, а “разными версиями” или “разными лицами” одного объекта с общим названием (например, “координаты”, “производные” и т. п.). Если задана одна из версий вектора, то по формулам (68) можно найти его другую версию.

Все сказанное выше о векторах очевидным образом обобщается на любые тензоры, в которых можно перемещать любой из индексов точно так же, как и для векторов, т. е. по правилу (68). Приведем примеры:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} T_{\mu\nu}, & T_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} T^{\mu\nu}, \\ T_\alpha{}^\beta &= g_{\alpha\mu} g^{\beta\nu} T^\mu{}_\nu, & T^\alpha{}_\beta &= g^{\alpha\mu} T_{\mu\beta}. \end{aligned} \quad (69)$$

На каждое перемещение индекса приходится одна матрица g , расстановка индексов однозначно определяется двумя сформулированными выше общими правилами.

Запись формул типа (68), (69) становится очень простой, если явно разделить временные и пространственные компоненты тензора (технически для индексов $\alpha \rightarrow \{0, i\}$). Тогда при учете явного вида матрицы g (38)

для вектора получаем

$$A_0 = A^0, \quad A_i = -A^i, \quad (70)$$

а для тензора ранга 2 аналогично

$$T_{00} = T^{00}, \quad T_{0i} = -T^{0i}, \quad T_{i0} = -T^{i0}, \quad T_{ik} = T^{ik}. \quad (71)$$

Общее правило: искомые компоненты всегда различаются лишь множителем ± 1 , перемещение каждого латинского индекса дает множитель -1 , перемещение индекса "0" на знаке не отражается.

Некоторые математические или физические величины имеют первичное определение, однозначно фиксирующее их природу. Например, по определению, обычные координаты ($ct \equiv x^0$, $\vec{x}_i \equiv x^i$) — контравариантный вектор x^α , а производные по этим координатам ($c^{-1}\partial_t \equiv \partial_0$, $\vec{\nabla}_i \equiv \partial_i$) — ковариантный вектор ∂_α . По этим "первичным версиям" с помощью соотношений (70) можно получить их "вторичные версии" x_α и ∂^α :

$$x_0 = x^0, \quad x_i = -x^i, \quad \partial^0 = \partial_0, \quad \partial^i = -\partial_i. \quad (72)$$

Предупреждение: необходимо четко различать латинские индексы типа i в (72) как обозначения пространственных компонент четырехмерных величин и такие же индексы в чисто трехмерных объектах. Последние, по соглашению, всегда ставятся снизу, а первые могут быть как нижними, так и верхними, соответствующие величины тогда различаются знаком. Проблема в том, что иногда четырехмерные и трехмерные объекты обозначаются одной и той же буквой (например, координаты x). Тогда нужно четко отличать трехмерный объект от четырехмерного и помнить, какая из различных четырехмерных версий является "первичной", т. е. соответствует трехмерному объекту без добавочных изменений знаков. В дальнейшем для трехмерных объектов мы будем часто использовать уточняющий знак " $\rightarrow$ ", индексы у таких величин должны быть только латинскими и всегда ставятся снизу.

Сделаем в заключение несколько простых, но полезных замечаний:

1. До сих пор мы различали метрический тензор g и символ Кронекера δ , но теперь с учетом правил (69) можно сказать, что символ δ — просто "смешанная версия" метрического тензора g , а именно:

$$g_\alpha^\beta = g^{\beta\mu} g_{\alpha\mu} = \delta_\alpha^\beta, \quad g^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta. \quad (73)$$

В матричной форме это есть очевидное равенство $g^2 = 1$. Ввиду диагональности матрицы δ вместо $g_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$ можно писать просто g_α^β или δ_α^β , что никогда не приведет к недоразумениям.

2. В любом равенстве любой свободный греческий индекс можно перемещать сверху вниз, при этом равенство остается верным. Например, из $A_\alpha = B_\alpha$ следует $A^\alpha = B^\alpha$, поскольку второе равенство получается действием одной и той же матрицы g на обе части первого равенства. Ясно, что все это справедливо для любого свободного индекса в любом равенстве тензорных величин.

3. В свертках можно делать одновременную перестановку “верх-низ” сворачиваемых значков, например, $A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha$ и аналогично для любых сверток в любом тензоре. Это также очевидное следствие матричного равенства $g^2 = 1$.

Тензорные поля на группе Лоренца. Они определяются точно так же, как аналогичные объекты на группе O_3 , только с заменой трехмерных координат четырехмерными. *Определение:* если каждой геометрической точке четырехмерного пространства-времени поставлен в соответствие некоторый тензор, то говорят, что задано “тензорное поле” $T_{\dots}(x)$, многоточием обозначены индексы тензора. Его закон преобразования пишется точно так же, как и для простого тензора с той разницей, что теперь у T появляется аргумент x , а у T' — аргумент x' в полной аналогии с определением (32) для группы O_3 (x и x' — координаты одной и той же геометрической точки в разных системах). В качестве примера приведем закон преобразования для скалярного и векторного контравариантного полей:

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \quad A'^\alpha(x') = \Lambda_\beta^\alpha A^\beta(x). \quad (74)$$

Из исходных определений автоматически следует, что символ ∂_α — ковариантный вектор, точнее, “дифференциальный оператор, преобразующийся как ковариантный вектор”. Отсюда следует, что правильно построенные конструкции, включающие тензорные поля и символ ∂ , также будут “правильными объектами” — тензорными полями. Например, если $\varphi(x)$ — скалярное поле, то $\partial_\alpha \varphi(x)$ — ковариантное векторное поле, $\partial_\alpha A^\alpha(x)$ — скалярное поле, и т. п.

Правила перемещения индексов сверху вниз и их сворачивания для тензорных полей те же самые, как у простых тензоров. Например, $A_\alpha(x) = g_{\alpha\beta} A^\beta(x)$, свертка векторных полей $A_\alpha(x) B^\alpha(x)$ — скалярное поле и т. п.

В заключение добавим, что всюду в этом разделе речь шла о классификации величин по отношению к группе собственных преобразований Лоренца. Конечно, мы могли бы расширить ее до “полной группы”, включив операции отражения P , T , PT и введя классификацию тензоров по отношению к этим дискретным преобразованиям (подобно делению на “истинные тензоры” и “псевдотензоры” для группы O_3). Но из-за наличия нескольких отражений эта классификация будет более сложной, чем для группы O_3 , и практически несущественна для задач классической электродинамики (но в других дисциплинах, например в физике элементарных частиц, она важна). Поэтому мы не будем касаться этих вопросов.

На этом мы заканчиваем “математическое отступление” и возвращаемся к физике, используя разработанный язык тензоров на группе Лоренца.

2.9 Тензорная природа потенциалов и напряженностей

Напряженности E и H — два трехмерных вектора, т. е. имеют в сумме 6 компонент, а потенциалы φ (скалярный) и A (векторный) имеют в сумме 4 компоненты. Предполагая, что эти величины являются некоторыми “правильными объектами” на группе Лоренца (для краткости в дальнейшем будем говорить просто “тензорами” вместо более точного термина “тензорными полями”), постараемся по числу компонент угадать, какими именно. Исключим из рассмотрения скаляры, поскольку при переходе к движущейся системе интересующие нас величины явно не могут быть инвариантными. Следующими по сложности четырехмерными объектами являются вектор с четырьмя компонентами и тензор второго ранга типа $T_{\alpha\beta}$, в общем случае имеющий 16 независимых компонент. Естественно предположить, что четыре компоненты потенциалов φ , A образуют четырехмерный вектор.

Остаются напряженности, которых по числу компонент (6) больше, чем у вектора, но меньше, чем у тензора второго ранга. Решение вопроса в том, чтобы рассматривать тензор не общего вида, а с определенными свойствами симметрии относительно перестановки индексов. Это возможно потому, что свойство симметрии или антисимметрии для тензоров типа $T_{\alpha\beta}$ или $T^{\alpha\beta}$ со значками одной природы является “лоренц-инвариантным”, т. е. сохраняется при преобразованиях (67). [Для тензоров типа $T_{\alpha}{}^{\beta}$ это не так, поскольку матрицы преобразования по индексам α и β различны и

исходная симметрия при преобразованиях (67) теряется.] Поэтому для тензоров типа $T_{\alpha\beta}$ или $T^{\alpha\beta}$ требование симметричности или антисимметричности можно накладывать как дополнительное ограничение. Поскольку симметричная 4×4 матрица имеет, очевидно, 10 независимых компонент, а антисимметричная — 6, ясно, что естественным представителем напряженностей в новой терминологии должен быть некоторый антисимметричный тензор второго ранга.

Рассмотрим теперь подробнее потенциалы и напряженности.

Потенциалы. Итак, по числу компонент мы предполагаем, что скалярный потенциал φ и три компоненты векторного потенциала A образуют вместе некоторый четырехмерный вектор. [Отметим, что размерности скалярного и векторного потенциалов одинаковы, поэтому при их объединении в четырехмерный объект не требуется вводить добавочных размерных коэффициентов.] Конечно, строго обосновать это предположение на данном этапе мы не можем. Главным аргументом в его пользу будет внутренняя самосогласованность и красота получаемых на основе этого предположения соотношений. Конечный критерий — эксперимент, и он подтверждает выводы релятивистской теории.

Четырехмерный потенциал принято обозначать той же буквой A , как и трехмерный векторный потенциал, который с этого момента будем обозначать через $\vec{A}$, чтобы отличать от четырехмерного вектора A . Ясно, что при объединении φ и $\vec{A}$ в четырехмерный вектор A скалярный потенциал φ должен соответствовать 0-компоненте вектора A , а векторный потенциал $\vec{A}$ — пространственным составляющим A .

Считая A четырехмерным вектором, мы должны затем решить, какая из его версий (“ко.” или “контр.”) соответствует исходным потенциалам (φ , $\vec{A}$). Ответ на этот вопрос можно получить, исходя из вида калибровочных преобразований (16), которые в терминах производных ∂_α ($\partial_0 = c^{-1}\partial_t$, $\partial_i = \nabla_i$) переписываются следующим образом: $\varphi' = \varphi - \partial_0\Phi$, $\vec{A}'_i = \vec{A}_i + \partial_i\Phi$. Добавки к потенциалам в этих двух соотношениях входят с разными знаками, поэтому их нельзя истолковать как единый объект $\propto \partial_\alpha\Phi$. Но если перейти к производным с верхним индексом по правилам (72), получим

$$\varphi' = \varphi - \partial^0\Phi, \quad \vec{A}'_i = \vec{A}_i - \partial^i\Phi, \quad (75)$$

т. е. теперь обе добавки — компоненты единого объекта $\partial^\alpha\Phi$. Функция Φ в калибровочных преобразованиях произвольна, в частности, может быть

скалярным полем, и тогда $\partial^\alpha \Phi$ — контравариантное векторное поле. Это аддитивная добавка к набору потенциалов $(\varphi, \vec{A})$, поэтому этот набор также следует считать контравариантным векторным полем (складываться всегда должны величины одной природы).

Таким образом, первичной версией четырехмерного потенциала A является его контравариантная версия A^α :

$$\varphi \equiv A^0, \quad \vec{A}_i \equiv A^i. \quad (76)$$

Соответствующая ковариантная версия A_α получается из (76) по общему правилу (70), т. е. изменением знака при пространственных компонентах.

Калибровочные преобразования (75) в терминах четырехмерного потенциала A^α принимают следующий вид:

$$A'^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \Phi \quad (77)$$

(мы изменили знак при $\partial^\alpha \Phi$, что несущественно ввиду произвольности Φ). Соотношение (77) — ковариантная запись калибровочных преобразований.

На этом мы заканчиваем обсуждение природы потенциалов с точки зрения группы Лоренца, а в заключение сделаем замечание идеологического характера.

Замечание: сказав, что потенциалы $(\varphi, \vec{A}) = \{A^\alpha\}$ — контравариантное векторное поле, мы тем самым утверждаем, что эти величины преобразуются по правилу (74), т. е. по заданным потенциалам $A^\alpha(x)$ в исходной системе отсчета однозначно предсказываются значения потенциалов $A'^\alpha(x')$ в новой системе. Но без наложения добавочных калибровочных условий любое суждение о том, “чему равны потенциалы”, в принципе не может быть однозначным ввиду калибровочного произвола. С точки зрения физики любые два набора потенциалов, связанных калибровочным преобразованием, полностью эквивалентны и никакие реальные эксперименты не могут их различить. Поэтому если один человек говорит, что “потенциалы в новой системе равны тому-то”, а другой скажет “тому-то плюс некоторое калибровочное преобразование”, то оба будут одинаково правы, и выбор варианта — вопрос удобства.

Это замечание порождено дискуссией с моим коллегой В. В. Верещагиным, который считает нужным добавлять некоторое калибровочное преобразование, основываясь на соображениях из области физики элементарных частиц. Но в классической электродинамике, являющейся предметом

данного курса, нет никаких видимых причин для искажения простого закона преобразования векторного поля (74) применительно к потенциалам $A^\alpha(x)$. Поэтому всюду в дальнейшем мы будем считать, что потенциалы преобразуются по правилу (74), как и любое другое контравариантное векторное поле.

Напряженности. Прежде всего воспроизведем формулы (13), пользуясь обозначением ∂_α и символом “ $\rightarrow$ ” для трехмерных векторов:

$$\vec{H}_i = (\text{rot } \vec{A})_i = \varepsilon_{ikl} \partial_k \vec{A}_l, \quad \vec{E}_i = -\partial_i \varphi - \partial_0 \vec{A}_i. \quad (78)$$

Теперь вернемся к нашей проблеме — представление напряженностей в терминах “правильных объектов” на группе Лоренца. Выше было показано, что по числу компонент естественным кандидатом на эту роль является антисимметричный тензор второго ранга. С другой стороны, из (78) видно, что напряженности — первые производные потенциалов, т. е. в четырехмерных обозначениях величины типа ∂A . Отсюда однозначно следует, что кандидатом на роль “лоренц-ковариантного представителя” напряженностей является величина

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \quad (79)$$

которую называют “тензором поля”.

Рассмотрим подробнее компоненты тензора (79), разделяя все греческие индексы на “временные — пространственные”. Ввиду антисимметрии $F_{00} = 0$, поэтому достаточно определить компоненты F_{0i} и F_{ik} с $i < k$. При сопоставлении с формулами (78) нужно учитывать, что трехмерным потенциалам соответствует контравариантная версия A^α в (76), а потенциалы A_α в (79) — ковариантная версия. Их компоненты связаны между собой общим правилом (70): $A_0 = A^0$, $A_i = -A^i$. Учитывая это и соотношения (76), (78), получаем (напомним, что у трехмерных объектов типа $\vec{A}$ индексы всегда ставятся внизу):

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 A^i - \partial_i A^0 = -\partial_0 \vec{A}_i - \partial_i \varphi = \vec{E}_i.$$

Рассмотрим теперь $F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i = -\partial_i A^k + \partial_k A^i = -\partial_i \vec{A}_k + \partial_k \vec{A}_i$. Сравнивая эти величины с компонентами $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$, заключаем, что $F_{12} = -\vec{H}_3$, $F_{13} = \vec{H}_2$, $F_{23} = -\vec{H}_1$, прочие компоненты F_{ik} определяются требованием антисимметрии F . Все эти соотношения вместе можно записать в виде одного равенства $F_{ik} = -\varepsilon_{ikl} \vec{H}_l$.

Тем самым мы определили все компоненты тензора $F_{\alpha\beta}$. Его контравариантная версия получается из ковариантной по правилу (71). Суммируя все сказанное, приведем окончательный результат — выражения для компонент тензора F через напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$F_{0i} = -F^{0i} = \vec{E}_i, \quad F_{ik} = F^{ik} = -\varepsilon_{ikl}\vec{H}_l, \quad (80)$$

все прочие компоненты находятся из условия антисимметричности F (в частности, $F_{00} = F^{00} = 0$ и аналогично для диагональных компонент F_{ik}).

Если свернуть обе части последнего равенства (80) с ε_{ikp} , получим $\varepsilon_{ikp}F_{ik} = -\varepsilon_{ikp}\varepsilon_{ikl}\vec{H}_l = -2\delta_{pl}\vec{H}_l = -2\vec{H}_p$ (мы воспользовались формулой свертки двух ε по паре индексов). Переобозначив индексы, получаем:

$$\vec{H}_i = -(1/2)\varepsilon_{ikl}F_{kl} = -(1/2)\varepsilon_{ikl}F^{kl}. \quad (81)$$

Поскольку $F_{\alpha\beta}$ — тензор, т. е. объект с известным законом преобразования, из соотношений (80), (81) можно получить законы преобразования напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при переходе к движущейся системе отсчета, что будет сделано впоследствии.

2.10 Ковариантная формулировка уравнений Максвелла для потенциалов

Термин “ковариантная формулировка” или “ковариантная запись” мы всегда будем понимать как “релятивистски-ковариантная”. Это означает, что соотношение записано в терминах “правильных объектов” на группе Лоренца — тензоров или тензорных полей, внешний признак — греческие индексы любой (“ко.” или “контр.”) природы. Термин “ковариантная запись” не нужно путать с термином “ковариантная версия объекта”.

Переходим теперь к нашей теме — уравнениям Максвелла для потенциалов. Нам известна их трехмерная форма (15), которую мы сейчас воспроизведем с использованием четырехмерного символа ∂_α и уточняющего знака “→” для обозначения трехмерных векторов:

$$\square\varphi - \partial_0(\partial_0\varphi + \text{div } \vec{A}) = 4\pi\rho, \quad \square\vec{A}_i + \partial_i(\partial_0\varphi + \text{div } \vec{A}) = (4\pi/c)\vec{j}_i, \quad (82)$$

где $\square$ — волновой оператор (14). Если переписать его в ковариантных обозначениях (72), получим:

$$\square = \partial_0\partial_0 - \partial_i\partial_i = \partial_0\partial^0 + \partial_i\partial^i = \partial_\alpha\partial^\alpha, \quad (83)$$

откуда видно, что это “лоренц-скаляр”, точнее, скалярный дифференциальный оператор. Это единственный лоренц-скаляр, который можно построить из двух символов ∂ , т. е. это точный аналог оператора Лапласа $\Delta = \partial_i \partial_i$ для группы O_3 .

Входящее в (82) выражение в скобках (...) также “лоренц-скаляр”, поскольку в обозначениях (76) имеем:

$$\partial_0 \varphi + \operatorname{div} \vec{A} = \partial_0 A^0 + \partial_i A^i = \partial_\beta A^\beta \quad (84)$$

(индекс “ α ” хотим сохранить для будущего). Подставляя (84) в уравнения (82) с учетом (76), получаем: $\square A^0 - \partial_0 \partial_\beta A^\beta = 4\pi\rho$, $\square A^i + \partial_i \partial_\beta A^\beta = (4\pi/c)\vec{j}_i$, откуда перемещением индексов по правилу (72) у одного из символов ∂ получаем

$$\square A^0 - \partial^0 \partial_\beta A^\beta = 4\pi\rho, \quad \square A^i - \partial^i \partial_\beta A^\beta = (4\pi/c)\vec{j}_i. \quad (85)$$

Левые части этих двух соотношений являются компонентами единого “правильного объекта” — контравариантного вектора $\square A^\alpha - \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta$, следовательно, их правые части должны иметь ту же природу с точки зрения группы Лоренца. Это естественно приводит к определению контравариантного вектора J^α , называемого *четырёхмерным током*:

$$J^0 = c\rho, \quad J^i = \vec{j}_i. \quad (86)$$

Используя это обозначение, соотношения (85) можно перенести в виде одного уравнения

$$\square A^\alpha - \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta = (4\pi/c)J^\alpha, \quad (87)$$

которое уже можно считать искомой ковариантной формулировкой уравнений Максвелла для потенциалов.

Все дальнейшее — некоторое “украшение” уравнения (87). Прежде всего, опустим в нем впиз свободный индекс “ α ” (см. замечание в конце п. 2.8), а затем в получении первом слагаемом $\square A_\alpha$ сделаем подстановку $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$. Тогда A^β в левой части станет общим множителем и уравнение (87) примет более красивый вид:

$$K_{\alpha\beta} A^\beta = (4\pi/c)J_\alpha, \quad K_{\alpha\beta} = \square g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta. \quad (88)$$

Это мы и будем считать окончательным вариантом ковариантной записи уравнений Максвелла для потенциалов. Для уточнения отметим, что это “уравнения в произвольной калибровке”, так как при их выводе мы не накладывали на потенциалы никаких калибровочных условий.

2.11 Поперечность K , уравнение непрерывности, калибровочная инвариантность уравнений Максвелла, калибровочные условия

Определенный в (88) дифференциальный оператор $K_{\alpha\beta}$ обладает следующим свойством поперечности:

$$\partial^\alpha K_{\alpha\beta} = 0, \quad K_{\alpha\beta} \partial^\beta = 0. \quad (89)$$

Оно проверяется непосредственно: из определения операции K в (88) имеем $\partial^\alpha K_{\alpha\beta} = \partial^\alpha [\square g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta] = 0$, поскольку в первом слагаемом $\partial^\alpha g_{\alpha\beta} = \partial_\beta$, а во втором $\partial^\alpha \partial_\alpha = \square$ согласно (83), так что два вклада взаимно сокращаются. Точно так же проверяется второе равенство (89).

Ковариантная запись уравнения непрерывности. Если свернуть обе части уравнения для потенциалов (88) с символом ∂^α , то слева получим нуль в силу свойства поперечности K (89), поэтому справа $\partial^\alpha J_\alpha = 0$, или, эквивалентно (см. замечание в конце п. 2.8),

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0. \quad (90)$$

Это равенство — ковариантная запись уравнения непрерывности (11): действительно, при учете обозначений (86) и $x_0 = ct$ имеем $\partial_\alpha J^\alpha = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = c^{-1} \partial_t(c\rho) + \partial_i j_i = \partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Калибровочная инвариантность уравнений Максвелла. Ранее в п. 1.7 мы уже говорили, что уравнения Максвелла для потенциалов должны быть калибровочно-инвариантными в следующем смысле: если некоторый набор потенциалов — их решение, то калибровочно-преобразованный набор — также решение. Тогда мы не стали записывать прямой проверки этого утверждения, предоставив ее читателю. В ковариантной записи (88) эта проверка тривиальна: калибровочное преобразование потенциалов имеет вид (77) и вклад добавки $\partial^\beta \Phi$ к потенциалу A^β в (88) исчезает в силу свойства поперечности (89) операций K .

Калибровочные условия. Напомним, что так называют дополнительные условия, которые накладывают на потенциалы для полного или частичного устранения их калибровочного произвола (см. п. 1.7). Конкретно мы обсуждали два условия: кулоновскую калибровку (17)

и калибровку Лоренца (18). Выражение в левой части равенства (18) совпадает с (84), т. е. лоренцова калибровка допускает релятивистски-ковариантную запись:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (91)$$

Выражение в левой части — “правильный объект” — скалярное поле с законом преобразования (74), т. е. из его равенства нулю в одной системе отсчета следует, что оно будет равным нулю и в любой другой инерциальной системе отсчета, так что данное условие “лоренц-инвариантно”.

В отличие от лоренцовой, кулоновская калибровка $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ этим свойством не обладает. Но здесь нет нарушения общих принципов, поскольку калибровочное условие — не закон природы, а некоторое дополнительное требование на потенциалы, выбор которого произволен (в классе допустимых калибровок), и оно не обязано быть лоренц-инвариантным.

2.12 Общие соображения о виде уравнений Максвелла для потенциалов

Мы вывели уравнения (88) исходя из конкретной трехмерной формы записи уравнений Максвелла (15), а теперь поставим вопрос: каков минимальный набор общих требований, позволяющий предсказать вид уравнений (88)?

Руководствуясь лишь общей структурой уравнений (15), можно сформулировать следующий набор требований:

1. Мы ищем линейные неоднородные уравнения типа $KA = I$ с векторами A , I и матричной дифференциальной операцией K . Это операция с постоянными коэффициентами, содержащая производные не выше второго порядка.

2. Операция K строится только из символов ∂ и не содержит никаких дополнительных размерных параметров (константа c^{-1} всегда группируется с ∂_t и переходит в $\partial_0 = c^{-1}\partial_t$).

3. Уравнение $KA = I$ должно быть лоренц-ковариантным.

4. Уравнение должно быть калибровочно-инвариантным.

Покажем, что эти требования фиксируют вид K с точностью до несущественного общего множителя. Из требования релятивистской ковариантности следует, что уравнение должно строиться из “правильных

объектов", т. е. в подробной записи должно иметь следующий вид: $K_{\alpha\beta}A^\beta = I_\alpha$, где $K_{\alpha\beta}$ — тензорный дифференциальный оператор (любые другие корректные варианты размещения индексов дают эквивалентные формы записи). Теперь поставим вопрос: что есть общий вид тензора $K_{\alpha\beta}$, построенного только из фундаментального тензора $g_{\alpha\beta}$ (присутствие которого всегда допустимо, подобно символу δ_{ik} для группы вращений) и символов ∂ , причем с производными не выше второго порядка? Ответ очевиден:

$$K_{\alpha\beta} = a\Box g_{\alpha\beta} + b\partial_\alpha\partial_\beta + cg_{\alpha\beta}, \quad (92)$$

где a, b, c — некоторые числовые коэффициенты. Полностью антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ не может входить в $K_{\alpha\beta}$, так как два его лишних индекса можно свернуть только с двумя символами ∂ , что будет равно нулю сверткой "симметричного с антисимметричным".

Учтем теперь требование отсутствия в K добавочных размерных параметров. Из (92) видно (по числу производных ∂), что коэффициенты a и b имеют одинаковую размерность, а коэффициент c — другую, поэтому в (92) нужно оставить либо только вклады с коэффициентами a и b , либо только один вклад с коэффициентом c . Второй вариант явно неприемлем, поэтому принимаем первый: $c = 0$. Из двух оставшихся коэффициентов a и b один можно считать общим множителем, поэтому существенно лишь их отношение b/a . Это отношение однозначно фиксируется требованием калибровочной инвариантности, эквивалентным условию поперечности (89) операции K : для обеспечения поперечности необходимо $b/a = -1$, что и завершает доказательство.

Таким образом, в релятивистских обозначениях вид уравнений (88) предсказывается практически однозначно из общих соображений, чего нельзя сказать об исходных уравнениях (15) (нет видимых причин, запрещающих изменить в них, например, знак при каком-нибудь из вкладов). Впоследствии мы будем неоднократно убеждаться, что сам язык "правильных объектов" — тензоров на группе Лоренца — во многих случаях практически однозначно подсказывает вид ответов.

Те общие соображения, которыми мы воспользовались выше для случая векторного поля A , используются в теоретической физике и для других полей. В качестве примера, рассмотрим скалярное поле φ : для него в соответствующем уравнении $K\varphi = I$ операция K — лоренц-скаляр, ее общий вид есть $K = a\Box + b$ или $\Box + \text{const}$ с точностью до множителя. Это приводит к хорошо известному уравнению Клейна — Гордона для

скалярного поля: $(\square + \text{const})\varphi = I$. Заинтересованный читатель может попытаться найти на основе аналогичных соображений общий вид линейного уравнения для тензорного поля типа $T_{\alpha\beta}$.

2.13 Ковариантная запись уравнений Максвелла для напряженностей

Уравнения Максвелла для напряженностей (1)–(4) содержат два однородных и два неоднородных уравнения. В каждой из этих двух пар одно уравнение скалярное, а второе — векторное, т. е. по числу компонент каждая пара состоит из четырех уравнений.

Их левые части — первые производные напряженностей, т. е. в ковариантных обозначениях величины типа ∂F , где F — тензор поля (79) — “ковариантный представитель” напряженностей. Из общих принципов мы ожидаем, что уравнения должны иметь ковариантную запись, поэтому выражения ∂F в их левых частях должны быть “правильными объектами”, причем имеющими известное (а именно по четыре в каждой паре) число независимых компонент. Поскольку у ∂ один индекс, а у F — два, для получения “правильного объекта” у нас есть только две возможности: либо свернуть индекс ∂ с одним из индексов F (неважно с каким ввиду антисимметрии F), либо оставить все три индекса свободными, т. е. рассматривать тензорное произведение типа $\partial_\alpha F_{\beta\lambda}$. Первый вариант приводит, как мы сейчас убедимся, к неоднородным уравнениям Максвелла, а второй — к однородным.

Неоднородные уравнения. Рассмотрим свертку ∂ с тензором F (79), например, $\partial^\beta F_{\beta\alpha}$ (индекс “ α ” хотим сохранить свободным). Имеем: $\partial^\beta F_{\beta\alpha} = \partial^\beta (\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta) = \square A_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta A^\beta = (\square g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta) A^\beta = K_{\alpha\beta} A^\beta$, где мы воспользовались ковариантной записью оператора $\square$ (83), определенном $K_{\alpha\beta}$ в (88) и возможностью одновременной перестановки “верх-низ” индексов суммирования (см. замечание в конце п. 2.8).

Итого, мы получили следующее равенство:

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} = K_{\alpha\beta} A^\beta. \quad (93)$$

Его правая часть известна из (88), следовательно

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} = (4\pi/c) J_\alpha. \quad (94)$$

Это и есть искомая ковариантная запись неоднородных уравнений Максвелла для напряженностей.

Однородные уравнения. В ковариантных обозначениях эти уравнения должны иметь общую структуру $\partial F = 0$, причем все три индекса в левой части (один у ∂ , два у F) должны быть свободными, так как “вариант свертки” мы уже рассматривали и он однозначно приводит к неоднородным уравнениям (94). Совершенно очевидно, что простая запись $\partial_\alpha F_{\beta\lambda} = 0$ неприемлема, так как из нее следует $F_{\beta\lambda} = \text{const}$, а это не общий случай. Решение проблемы здесь точно такое же, каким мы уже однажды воспользовались в п. 2.9 при обсуждении вопроса о тензорной природе напряженностей. Оно состоит в том, что в качестве левой части уравнений нужно рассматривать не сам тензор $\partial_\alpha F_{\beta\lambda} \equiv T_{\alpha\beta\lambda}$, а некоторую его “часть”, обладающую определенным свойством симметрии относительно перестановок индексов (напомним, что при этом следует рассматривать лишь объекты с индексами одинаковой природы, мы для определенности выбрали их нижними).

Попробуем сначала просто угадать нужное свойство симметрии по требуемому числу независимых компонент, в нашем случае их должно быть четыре (см. выше). Произвольный тензор $T_{\alpha\beta\lambda}$ имеет $4^3 = 64$ компоненты, а нам нужно превратить это число в 4. При столь значительном сокращении первым кандидатом на роль требуемого свойства симметрии является наиболее “жесткое” из них — требование полной антисимметрии (т. е. величина меняет знак при перестановке любой пары соседних индексов), максимально ограничивающее число независимых компонент. Итак, вопрос: чему равно число независимых компонент полностью антисимметричного тензора третьего ранга $T_{\alpha\beta\lambda}$? Ответ получается несложно по той же схеме, как при обсуждении тензора ε_{ikl} в п. 1.2. Каждый из греческих индексов $\alpha\beta\lambda$ может принимать цифровые значения 0, 1, 2, 3, и эти значения для всех трех индексов $\alpha\beta\lambda$ должны быть различными, так как при совпадении каких-нибудь двух цифровых значений соответствующая компонента $T_{\alpha\beta\lambda}$ должна быть равна нулю вследствие антисимметрии. По той же причине порядок цифровых индексов в $\alpha\beta\lambda$ не имеет значения (их перестановки дают лишь множитель ± 1), поэтому для классификации независимых компонент важен лишь сам набор трех различных цифровых индексов. Поскольку все они набираются из четырех значений 0, 1, 2, 3, естественна классификация по принципу “без одного”, т. е. “без 0” означает $\alpha\beta\lambda = 1, 2, 3$, “без 1” — $\alpha\beta\lambda = 0, 2, 3$, и так далее. Всего таких вариантов 4, что и дает искомое число независимых компонент полностью антисиммет-

ричного тензора $T_{\alpha\beta\lambda}$, и это именно то число, которое нам нужно. Ясно, что любое другое “менее жесткое” требование симметрии привело бы к большему числу независимых компонент (например, можно сравнить их число для симметричной и антисимметричной матрицы).

Таким образом, мы приходим к гипотезе, что естественным кандидатом на роль левой части однородных уравнений является “полностью антисимметричная часть” тензора $\partial_\alpha F_{\beta\lambda}$.

Теперь нужно четко определить это понятие. Для тензора второго ранга $T_{\alpha\beta}$ очевидное равенство $T_{\alpha\beta} = (T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})/2 + (T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})/2$ есть однозначное разбиение на “симметричную” и “антисимметричную” части. Для объектов с большим числом индексов аналогичная классификация становится нетривиальной, но понятия “полностью симметричной” и “полностью антисимметричной” части таких объектов определяются достаточно просто: полностью симметричная часть получается усреднением объекта по всем вариантам перестановок его индексов, а полностью антисимметричная — аналогичное выражение, в котором все четные перестановки учитываются со знаком “+”, а все нечетные — со знаком “−”. Для тензора третьего ранга четными являются три циклических перестановки его индексов, а нечетными — три антициклических (т. е. “одна + циклические перестановки из нее”). По этому правилу полностью антисимметричная часть $As T_{\alpha\beta\lambda}$ произвольного тензора $T_{\alpha\beta\lambda}$ определяется соотношением:

$$As T_{\alpha\beta\lambda} = (1/6)[T_{\alpha\beta\lambda} + T_{\beta\lambda\alpha} + T_{\lambda\alpha\beta} - T_{\beta\alpha\lambda} - T_{\alpha\lambda\beta} - T_{\lambda\beta\alpha}]. \quad (95)$$

Итак, мы предполагаем, что искомые однородные уравнения Максвелла в ковариантной записи должны иметь вид

$$As[\partial_\alpha F_{\beta\lambda}] = 0. \quad (96)$$

Подставив в (95) $T_{\alpha\beta\lambda} = \partial_\alpha F_{\beta\lambda}$ и убрав несущественный множитель $1/6$, из (96) получаем:

$$\partial_\alpha F_{\beta\lambda} + \partial_\beta F_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda F_{\alpha\beta} - \partial_\beta F_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha F_{\lambda\beta} - \partial_\lambda F_{\beta\alpha} = 0.$$

Если учесть антисимметрию тензора F , то видно, что три последних вклада в полученном уравнении просто удваивают три первых вклада, поэтому его можно переписать в виде

$$\partial_\alpha F_{\beta\lambda} + \partial_\beta F_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda F_{\alpha\beta} = 0, \quad (97)$$

где суммирование производится по трем циклическим перестановкам индексов.

Таким образом, из общих соображений, т. е. из требования релятивистской ковариантности при известном числе независимых компонент мы однозначно приходим к заключению, что искомые однородные уравнения Максвелла для напряженностей в ковариантной записи должны иметь вид (97). Проверим теперь, что это правильно, т. е. уравнения (97) в трехмерных обозначениях сводятся к (1), (2). Для этого будем подставлять в (97) конкретные значения индексов $\alpha\beta\lambda$, классифицируя их по принципу “без которого” (см. выше). Первый вариант — “без 0”, т. е. $\alpha\beta\lambda = 1, 2, 3$. Тогда из (97) с учетом соотношений (80) и антисимметрии F получаем:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = -\partial_1 \vec{H}_1 - \partial_2 \vec{H}_2 - \partial_3 \vec{H}_3 = -\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

что совпадает с уравнением (1).

Рассмотрим теперь вариант “без 1”, т. е. $\alpha\beta\lambda = 0, 2, 3$. Тогда из (97) и (80) получаем:

$$0 = \partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} = -\partial_0 \vec{H}_1 - \partial_2 \vec{E}_3 + \partial_3 \vec{E}_2 = -\partial_0 \vec{H}_1 - (\operatorname{rot} \vec{E})_1,$$

что совпадает с первой компонентой трехмерного векторного равенства (2). Точно так же проверяется, что два других варианта (“без 2” и “без 3”) соответствуют двум другим компонентам уравнения (2), что мы предлагаем сделать читателю.

Резюме: в ковариантной записи неоднородные уравнения Максвелла для напряженностей имеют вид (94), а однородные — (97).

В заключение добавим, что общим решением уравнений (97) для считающейся неизвестной величины F является ее представление в виде (79) подобно тому, как из $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ следует $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

2.14 Преобразования потенциалов и напряженностей при переходе к движущейся системе отсчета

Мы считаем (см. п. 2.9), что потенциалы $\{\varphi, \vec{A}\} = \{A^\alpha\}$ являются контравариантным вектором, а напряженности — компонентами тензора второго ранга (79) или его контравариантной версии. Тем самым мы считаем известными их законы преобразования:

$$A'^\alpha(x') = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta(x), \quad F'^{\alpha\beta}(x') = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu F^{\mu\nu}(x). \quad (98)$$

Мы выбрали контравариантную версию F , чтобы матрица преобразования Λ по всем индексам в (98) была одинаковой. Она известна из закона преобразования координат (55), который в новой записи (66) принимает вид $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$. Сравнивая это соотношение с (55) (в новой записи индексы у x_0 и x_i в (55) нужно переместить наверх), находим значения величин Λ^α_β в (98):

$$\Lambda^0_0 = a, \quad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = -bv_i, \quad \Lambda^i_k = \delta_{ik} + dv_i v_k, \quad (99)$$

где $a \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $b \equiv a/c$, $d \equiv (a - 1)/v^2$.

Здесь v — скорость новой системы относительно старой и, как и повсюду, c — скорость света (поэтому мы и обозначили коэффициенты через a , b , d вместо более естественного обозначения α , β , γ).

Формулы (98) дают полный и окончательный ответ на наш вопрос о законе преобразования потенциалов и напряженностей в ковариантных обозначениях. Все дальнейшее — переформулировка этих соотношений в обычных трехмерных обозначениях.

Для этого нам понадобятся соотношения (99), а также формулы (76), (80), (81), выражающие потенциалы и напряженности в четырехмерных обозначениях. Для удобства читателя воспроизведем здесь нужные соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi &= A^0, & E_i &= F^{i0} = -F^{0i}, & F^{ik} &= -\varepsilon_{ikl} H_l, \\ \vec{A}_i &= A^i, & -2H_i &= \varepsilon_{ikl} F^{kl}. \end{aligned} \quad (100)$$

Здесь и далее мы опускаем уточняющий знак “ $\rightarrow$ ” у E и H , поскольку эти величины, подобно скорости v , всегда понимаются только как трехмерные векторы и не имеют четырехмерных аналогов с тем же обозначением (в отличие от координат x или потенциалов A).

Переходим теперь к самим законам преобразования (речь идет о переходе к движущейся системе без добавочного поворота осей).

Потенциалы. По определению, четырехмерные потенциалы A^α преобразуются точно так же, как координаты x^α , т. е. их закон преобразования дается известными соотношениями (55) с заменой в них $x^0 \rightarrow A^0 \equiv \varphi$, $x^i \rightarrow A^i \equiv \vec{A}_i$ (в новых обозначениях индексы у x_0 и x_i в (55) нужно переместить наверх). В итоге из (55) получаем следующий закон преобразования потенциалов:

$$\varphi' = a[\varphi - (vA)/c], \quad \vec{A}' = \vec{A} - (a/c)\varphi\vec{v} + [(a-1)/v^2](vA)\vec{v}, \quad (101)$$

где (vA) — скалярное произведение трехмерных векторов $\vec{v}$ и $\vec{A}$. В (101) и всюду далее для сокращения записи мы опускаем аргументы x , x' у потенциалов и напряженностей, их расстановка известна из (98).

Напряженности. Общая идея проста: напряженности E , H выражаются формулами (100) через компоненты тензора F , закон преобразования которого известен из (98) с учетом явного вида (99) матрицы Λ . В дальнейшем мы будем сразу учитывать антисимметрию F , опуская вклады с $F^{00} = 0$. Начнем с вектора E : из (100) и (98) имеем:

$$E'_i = F'^{i0} = \Lambda_\mu^i \Lambda_\nu^0 F^{\mu\nu} = \Lambda_0^i \Lambda_k^0 F^{0k} + \Lambda_k^i \Lambda_0^0 F^{k0} + \Lambda_k^i \Lambda_s^0 F^{ks}.$$

(Напомним, что суммирование по греческому индексу сводится к вкладу 00 + суммирование по латинскому индексу.) Подставляя сюда Λ из (99) и F из (100), получаем:

$$\begin{aligned} E'_i &= (-bv_i)(-bv_k)(-E_k) + (\delta_{ik} + dv_iv_k)a(E_k) + \\ &+ (\delta_{ik} + dv_iv_k)(-bv_s)(-\varepsilon_{ksl}H_l) = \\ &= -b^2(vE)v_i + aE_i + ad(vE)v_i + b\varepsilon_{isl}v_sH_l + bdv_iv_kv_s\varepsilon_{ksl}H_l. \end{aligned}$$

Последний вклад равен нулю как “свертка симметричного с антисимметричным” по индексам ks , предпоследний сводится к векторному произведению v и H . Первый и третий вклады — подобные члены, и надо сложить их коэффициенты. Учитывая определение a , b , d в (99), получаем $ad - b^2 = a(a-1)/v^2 - a^2/c^2 = [a^2(1 - v^2/c^2) - a]/v^2 = (1-a)/v^2$. Подставляя это в приведенное выше выражение, получаем окончательный результат:

$$E'_i = aE_i - [(a-1)/v^2](vE)v_i + (a/c)[v \times H]_i. \quad (102)$$

Рассмотрим теперь напряженность H . Из соотношений (98) и (100) имеем:

$$\begin{aligned}
-2H'_i &= \varepsilon_{ikl} F'^{kl} = \varepsilon_{ikl} \Lambda_\mu^k \Lambda_\nu^l F^{\mu\nu} = \\
&= \varepsilon_{ikl} \left\{ \Lambda_0^k \Lambda_s^l F^{0s} + \Lambda_s^k \Lambda_0^l F^{s0} + \Lambda_s^k \Lambda_m^l F^{sm} \right\} = \\
&= \varepsilon_{ikl} \left\{ (-bv_k)(\delta_{ls} + dv_l v_s)(-E_s) + (\delta_{ks} + dv_k v_s)(-bv_l)E_s + \right. \\
&\quad \left. + (\delta_{ks} + dv_k v_s)(\delta_{lm} + dv_l v_m)(-\varepsilon_{smp} H_p) \right\} = \\
&= \varepsilon_{ikl} \left\{ bv_k E_l + bd(vE)v_k v_l - bv_l E_k - bd(vE)v_k v_l - \varepsilon_{klp} H_p - \right. \\
&\quad \left. - dv_k v_s \varepsilon_{slp} H_p - dv_l v_m \varepsilon_{kmp} H_p - dv_k v_s v_l v_m \varepsilon_{smp} H_p \right\}.
\end{aligned}$$

Последний вклад внутри скобки {...} равен нулю как “свертка симметричного с антисимметричным” по индексам sm , вклады с коэффициентом bd взаимно сокращаются (отметим, что любой из них исчезает при свертке с внешним ε_{ikl}). В итоге получаем:

$$-2H'_i = b\varepsilon_{ikl} v_k E_l - b\varepsilon_{ikl} v_l E_k - \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{klp} H_p - d\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{slp} v_k v_s H_p - d\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{kmp} v_l v_m H_p.$$

Из антисимметрии ε следует, что второй вклад в этом соотношении просто удваивает вклад первого, а в остальных нужно воспользоваться известными (см. п. 1.2) формулами свертки двух ε по одному или двум индексам:

$$\begin{aligned}
-2H'_i &= 2b[v \times E]_i - 2\delta_{ip} H_p - \\
&\quad - d(\delta_{ip} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{kp}) v_k v_s H_p - \\
&\quad - d(\delta_{ip} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lp}) v_l v_m H_p = \\
&= 2b[v \times H]_i - 2H_i - dv^2 H_i + d(vH)v_i - dv^2 H_i + d(vH)v_i.
\end{aligned}$$

Во вкладах с коэффициентом d опять удвоение, вклады с H_i — подобные члены. Подставляя известные значения (99) коэффициентов b , d и сокращая общий множитель -2 , в итоге получаем:

$$H'_i = aH_i - [(a-1)/v^2](vH)v_i - (a/c)[v \times E]_i. \quad (103)$$

Формулы (101) для потенциалов и (102), (103) для напряженностей — искомые окончательные ответы. Приведем их для удобства читателя

в одном месте, сменив индексные обозначения для напряженностей на векторные:

$$\varphi' = a[\varphi - (vA)/c], \quad \vec{A}' = \vec{A} - (a/c)\varphi\vec{v} + [(a-1)/v^2](vA)\vec{v}, \quad (104.1)$$

$$\vec{E}' = a\vec{E} - [(a-1)/v^2](vE)\vec{v} + (a/c)[\vec{v} \times \vec{H}], \quad (104.2)$$

$$\vec{H}' = a\vec{H} - [(a-1)/v^2](vH)\vec{v} - (a/c)[\vec{v} \times \vec{E}]. \quad (104.3)$$

Формулы обратных преобразований получаются по общему правилу (п. 2.9): “штрихованные величины” переставляются с “нештрихованными” с одновременной заменой $v \rightarrow -v$:

$$\varphi = a[\varphi' + (vA')/c], \quad \vec{A} = \vec{A}' + (a/c)\varphi'\vec{v} + [(a-1)/v^2](vA')\vec{v}, \quad (105.1)$$

$$\vec{E} = a\vec{E}' - [(a-1)/v^2](vE')\vec{v} - (a/c)[\vec{v} \times \vec{H}'], \quad (105.2)$$

$$\vec{H} = a\vec{H}' - [(a-1)/v^2](vH')\vec{v} + (a/c)[\vec{v} \times \vec{E}']. \quad (105.3)$$

Напомним, что мы не пишем явно, но подразумеваем наличие у “нештрихованных” потенциалов и напряженностей аргумента x , а у “штрихованных” — x' , подробная занись в (98).

Выражения (104), (105) существенно упрощаются, если в одной из двух систем поле либо чисто электрическое, либо чисто магнитное. Заинтересованный читатель может сам получить нужные формулы для таких частных случаев, исходя из общих соотношений (104), (105).

Поле равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда. Полученные формулы преобразований потенциалов и напряженностей позволяют легко найти поле движущегося равномерно и прямолинейно точечного заряда. Пусть заряд e движется в исходной системе M по траектории $\vec{x} = \vec{v}t$, и мы хотим найти создаваемое им поле. Для этого перейдем в систему M' , которая движется со скоростью $\vec{v}$ вместе с зарядом, т. е. в этой системе заряд неподвижен и находится в ее начале координат. Поэтому поле в этой системе вычисляется элементарно: оно чисто электрическое с потенциалом $\varphi'(x') = e/|\vec{x}'|$ и напряженностью $\vec{E}'(x') = e\vec{x}'/|\vec{x}'|^3$. По этим величинам и $\vec{A}' = 0$, $\vec{H}' = 0$ нетрудно найти потенциалы и напряженности в исходной системе M с помощью формул обратных преобразований (105). Мы не будем этим заниматься, так как впоследствии будут получены формулы для поля точечного заряда, движущегося по произвольной заданной траектории, откуда как частный

случай находится и поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда. Но расчет с помощью соотношений (105) — хорошее и поучительное (в основном, из-за “борьбы” с аргументами x, x') упражнение, которое мы предлагаем, при желании, выполнить читателю.

2.15 Электродинамика с позиций теоретической механики. Функционал действия для электромагнитного поля

Напоминание: теоретическая механика систем с конечным числом степеней свободы. Начнем с краткого напоминания основных положений теоретической механики “простых систем”, т. е. систем с конечным числом степеней свободы. Система задается, прежде всего, перечислением конечного числа ее “обобщенных координат” $q \equiv \{q_a, a = 1, 2, \dots\}$. По смыслу q — набор параметров, однозначно определяющих статическое состояние системы (например, трехмерные пространственные координаты материальной точки, угол отклонения от вертикали для маятника и т. п.). В лагранжевом формализме, которым мы и будем ограничиваться, динамика системы определяется ее лагранжианом L , который задается как функция всех ее обобщенных координат $q = \{q_a\}$ и соответствующих скоростей $\dot{q} = \{\dot{q}_a\}$, а также, в общем случае, L может содержать явную зависимость от времени t . Функционал действия S — интеграл по времени от лагранжиана, в котором q и $\dot{q}$ считаются функциями от t : $S = \int dt L$. Тем самым S определяется как функционал от переменных $q(t)$ (напомним, что в математике функционалом называется закон соответствия между функциями и числами, в нашем случае функциям $q(t)$ ставится в соответствие число S). Подчеркнем, что хотя в лагранжиане q и $\dot{q}$ считаются независимыми переменными, функциональным аргументом S является только q , так как функции $\dot{q}_a(t) \equiv dq_a(t)/dt$ однозначно определяются по $q_a(t)$, следовательно, не являются независимыми. Для строгости изложения следовало бы указывать пределы интегрирования по времени в выражении для S и уточнять соответствующие краевые условия для q и $\dot{q}$. Но для дальнейшего все это несущественно, и мы не будем на этом останавливаться.

Уравнения движения для $q(t)$ в механике получаются, как известно, из требования “стационарности действия на классической траектории”: $\delta S = 0$, где δS — вариация действия при бесконечно малой вариации $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$ его функционального аргумента. Из определения

$$S = \int dt L(q, \dot{q}, t)$$

имеем $\delta S = \int dt \delta L(q, \dot{q}, t)$. Величина δL — обычный дифференциал функции L , который определяется стандартным правилом через вариации δq и $\delta \dot{q}$ ее независимых аргументов. Таким образом

$$\delta S = \int dt \delta L = \int dt \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a \right].$$

Подставив сюда $\delta \dot{q}_a = d\delta q_a/dt$ и затем “перебросив” производную d/dt в этом слагаемом на другой сомножитель (интегрирование по частям), получим

$$\delta S = \int dt \delta L = \int dt \sum_a \delta q_a \left[\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right] + \dots,$$

где многоточие ... — несущественные для дальнейшего внеинтегральные члены. Из требования $\delta S = 0$ при произвольных вариациях $\delta q_a(t)$ следует, что коэффициенты при них в подынтегральном выражении для δS должны быть равными нулю, откуда и получаем искомые уравнения движения (в математике их называют уравнениями Эйлера для рассматриваемой вариационной задачи):

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0. \quad (106)$$

Коэффициенты при вариациях $\delta q_a(t)$ в подынтегральном выражении для вариации δS функционала $S(q)$ называют, по определению, вариационными производными функционала $S(q)$ по переменным $q_a(t)$ и обозначают через $\delta S(q)/\delta q_a(t)$ (это определение очевидным образом обобщается на произвольный функционал с произвольными функциональными аргументами). Таким образом, уравнения (106) в компактной форме имеют вид $\delta S(q)/\delta q_a(t) = 0$. Индекс “ a ” в них является свободным, т. е. уравнений ровно столько, сколько обобщенных координат q_a .

Обобщение: теоретическая механика сплошной среды. Теперь речь пойдет о системах, обобщенные координаты которых зависят не только от времени t , но и от пространственных координат $\vec{x}$, т. е. являются “полями” $q = \{q_a(t, \vec{x}), a = 1, 2, \dots\}$. Типичный пример такой задачи — распространение звука в воздухе, где роль обобщенной координаты играет переменное давление $p(t, \vec{x})$ в каждой точке пространства. Другие примеры — распространение звука в твердых средах, волны на воде и т. п. В дальнейшем мы убедимся, что классическая электродинамика относится к этому же классу задач, а роль обобщенных координат q для нее будут играть потенциалы A^α .

Для таких задач первичным понятием является не лагранжиан L , а плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ — “количество лагранжиана в единице объема”. Определения лагранжиана L и функционала действия S принимают следующий вид:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad S = \int dt L = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = c^{-1} \int d^4x \mathcal{L}, \quad (107)$$

где $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$ — дифференциал объема в трехмерном пространстве, а $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ — в четырехмерном ($x^0 = ct$, отсюда и появляется множитель c^{-1} в последнем выражении (107)).

Для простых систем мы считали, что $L = L(q, \dot{q}, t)$. По аналогии, плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ считается функцией самих полей q и всех их первых производных $\partial_\alpha q$, а также, в общем случае, четырехмерных координат $x = t, \vec{x}$. Подчеркнем, что в качестве возможных переменных $\mathcal{L}$ допускаются не только “скорости” $\propto \partial_0 q$, но и первые (но не высшие!) производные $\partial_i q$ по пространственным координатам. Так всегда считалось и при рассмотрении нерелятивистских задач типа распространения звука, а с точки зрения релятивистской теории иначе и быть не может, так как временные и пространственные координаты при преобразованиях Лоренца смешиваются, так что между ними нет принципиального различия.

Итак, в общем случае $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \partial q, x)$, где $x = t, \vec{x}$, а ∂q — набор всех первых производных полей q . Уравнения движения для полей q получаются, как обычно, из требования стационарности действия $\delta S = 0$ на классических решениях. Рассуждая точно так же, как и для простых систем (см. выше), с учетом определений (107) получаем (с суммированием по повторяющемуся индексу α):

$$\delta S = c^{-1} \int d^4x \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha q_a)} \delta (\partial_\alpha q_a) \right]$$

Подставив сюда $\delta(\partial_\alpha q_a) = \partial_\alpha(\delta q_a)$ и выполнив интегрирование по частям, получим аналогичные (106) уравнения движения:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha q_a)} = 0. \quad (108)$$

Индекс “a” здесь свободный, а “ α ” — индекс суммирования.

Электродинамика. Будем считать обобщенными координатами для данной задачи четырехмерные потенциалы $A = \{A^\alpha\}$, а уравнения движения — известные уравнения Максвелла (88). Поставим вопрос: можно ли их интерпретировать как уравнения Эйлера типа (108) для вариационной задачи с некоторым функционалом действия $S(A)$? Вопрос содержательный, поскольку не всякие дифференциальные уравнения допускают такую интерпретацию: для этого нужно, чтобы левая часть равенства $\dots = 0$ могла быть истолкована как вариационная производная некоторого функционала, а это не всегда так (контрпример — известное уравнение Навье — Стокса в гидродинамике). Сразу скажем, что в нашем случае ответ утвердительный, — это будет доказано ниже прямым построением искомого функционала действия $S(A)$. Отметим также отличие нашей постановки задачи от традиционной: обычно по заданному функционалу действия строятся уравнения движения, а у нас наоборот — мы уже знаем уравнения движения (88) и пытаемся найти по ним функционал действия.

Переходя теперь непосредственно к построению искомого функционала $S(A)$, попробуем сначала угадать его вид с помощью не претендующих на строгость “правдоподобных рассуждений”. Затем мы проверим полученный таким путем ответ, что и будет окончательным строгим доказательством.

Итак, мы начинаем с уравнений (88), которые перепишем символически в виде $KA - I = 0$, где $I \equiv (4\pi/c)J$. Мы хотим представить левую часть уравнения в виде вариационной производной $\delta S(A)/\delta A$ для некоторого функционала $S(A)$. Если бы мы имели дело с простыми числовыми переменными и производными, то из равенства $\delta S(A)/\delta A = KA - I$ мы сразу же заключили бы, что $S(A) = KA^2/2 - IA$. Это выражение при его правильной интерпретации и есть искомый ответ, разумеется, с точностью до общего множителя, который по уравнениям движения не определяется.

Итак, переходим к “расшифровке” полученного выражения для $S(A)$. Учитывая наличие у всех объектов греческих индексов и требование релятивистской инвариантности, заключаем, что полученное выражение следует записывать в виде $S(A) = A^\alpha K_{\alpha\beta} A^\beta/2 - I_\alpha A^\alpha$ (“правильные

свертки"). Далее, поскольку речь идет о функционале типа (107), полученное выражение должно стоять под общим знаком интеграла $\int d^4x$... Но даже и теперь мы не можем признать подинтегральное выражение искомой плотностью лагранжиана $\mathcal{L}$, поскольку K в (88) — дифференциальная операция второго порядка, а плотность лагранжиана $\mathcal{L}$, по условию, должна быть функцией только самих полей A и их первых производных. Решение проблемы очевидно: одну из двух производных K нужно "перепросить" на левый сомножитель A интегрированием по частям. Это нетрудно сделать с помощью соотношения (93), из которого получаем: $\int d^4x A^\alpha K_{\alpha\beta} A^\beta = \int d^4x A^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} = - \int d^4x F_{\beta\alpha} \partial^\beta A^\alpha$. Учитывая здесь антисимметрию $F_{\beta\alpha}$, полученное выражение можно переписать в виде $-\int d^4x F_{\beta\alpha} (\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta)/2 = - \int d^4x F_{\beta\alpha} F^{\beta\alpha}/2$. В итоге мы приходим к следующему гипотетическому ответу для искомого функционала действия (переставим индексы суммирования α и β):

$$S(A) \propto \int d^4x \left[-F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 - I_\alpha A^\alpha \right], \quad (109)$$

в котором $I_\alpha = (4\pi/c)J_\alpha$ согласно (88), а $F_{\alpha\beta}$ нужно понимать как выражение (79), т. е. как линейную комбинацию первых производных потенциалов A — обобщенных координат нашей задачи.

Общий множитель при интеграле в (109) из уравнений движения не определяется. Он зависит от выбора системы единиц, в используемой нами повсюду гауссовой системе его полагают равным $1/4\pi c$. Тогда для функционала действия $S(A)$ и соответствующей (см. (107)) плотности лагранжиана $\mathcal{L}$ получаем следующие окончательные выражения:

$$\mathcal{L} = -F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/16\pi - J_\alpha A^\alpha/c, \quad S(A) = c^{-1} \int d^4x \mathcal{L}, \quad (110)$$

где $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Первое слагаемое в $\mathcal{L}$ — плотность лагранжиана свободного поля, второе — плотность лагранжиана взаимодействия поля с заданными источниками J , через них в $\mathcal{L}$ вносится явная зависимость от четырехмерных координат $x = t, \vec{x}$.

Мы получили выражение (110) для $\mathcal{L}$ исходя из "наводящих соображений", а теперь проверим, что оно правильно, т. е. уравнения движения (108) с данным $\mathcal{L}$ и обобщенными координатами $q = A$ совпадают с уравнениями Максвелла (88). В качестве q можно использовать как контравариантную версию потенциалов A^α , так и ковариантную версию $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$. Выбрав второй вариант (для симметрии, поскольку у символа ∂ в (108) индекс

нижний), перепишем уравнения (108) для $q = \{A_\alpha\}$, заменив в них индекс суммирования α на β , чтобы использовать индекс α как свободный:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = 0. \quad (111)$$

Подставим сюда $\mathcal{L}$ из (110) и вычислим частные производные функции $\mathcal{L}$ по ее независимым переменным A_α и $\partial_\beta A_\alpha$. Явная зависимость от A содержится лишь в слагаемом $-J_\alpha A^\alpha/c = -J^\alpha A_\alpha/c$, отсюда получаем $\partial \mathcal{L}/\partial A_\alpha = -J^\alpha/c$. Зависимость от производных $\partial_\beta A_\alpha$ содержится в первом слагаемом (110) $\propto F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$. Частную производную этого выражения по $\partial_\beta A_\alpha$ можно вычислить “прямолинейно”, подставив в него $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ и воспользовавшись очевидным равенством $\partial(\partial_\mu A_\nu)/\partial(\partial_\beta A_\alpha) = \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha$. Но есть более простой способ, а именно: рассмотрим вариацию величины $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ при произвольной вариации ее аргументов $\partial_\alpha A_\beta$ с учетом антисимметрии F . Имеем:

$$\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \delta F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta} = 2\delta F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \equiv (*),$$

поскольку два вклада в полученном выражении различаются только перестановкой индексов “верх-низ” и поэтому совпадают. Далее, имеем:

$$(*) = 2F^{\alpha\beta} \delta(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 4F^{\alpha\beta} \delta(\partial_\alpha A_\beta),$$

поскольку и здесь опять удвоение ввиду антисимметрии F . Таким образом, мы получили явное выражение для вариации рассматриваемой величины в виде линейной комбинации вариаций ее независимых переменных, тем самым определяют частные производные по этим переменным:

$$\partial[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]/\partial(\partial_\alpha A_\beta) = 4F^{\alpha\beta}. \quad (112)$$

Отсюда для нашей плотности лагранжиана (110) получаем $\partial \mathcal{L}/\partial(\partial_\beta A_\alpha) = -F^{\beta\alpha}/4\pi$, а выше было показано, что $\partial \mathcal{L}/\partial A_\alpha = -J^\alpha/c$. Подставив эти величины в (111) с учетом соотношения (93), нетрудно убедиться, что (111) совпадает с уравнениями Максвелла (88), — это и требовалось доказать.

Таким образом, электродинамика укладывается в рамки общих представлений теоретической механики сплошных сред с четырехмерными потенциалами A в качестве обобщенных координат.

2.16 Тензор энергии-импульса.

Законы сохранения энергии и импульса

Закон сохранения энергии для систем с конечным числом степеней свободы. Напомним, как выводится закон сохранения энергии в теоретической механике для простых систем. Он справедлив только для “консервативных систем”, т. е. таких, у которых лагранжиан L не зависит явно от времени t : $L = L(q, \dot{q})$. Рассмотрим значение L на классической траектории, т. е. на функциях $q(t)$, являющихся решениями классических уравнений движения (106). Тогда получаем:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d}{dt} \dot{q}_a \right].$$

Подставив сюда выражение для $\partial L / \partial q_a$ из уравнений движения (106), имеем

$$\frac{dL}{dt} = \sum_a \left[\dot{q}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d}{dt} \dot{q}_a \right] = \frac{d}{dt} \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a \right], \quad (113)$$

поскольку два слагаемых в полученном выражении складываются, очевидно, в производную произведения. Переставив в (113) все вклады в правую часть, в итоге получаем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0, \quad \mathcal{E} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a - L. \quad (114)$$

Сохраняющуюся на классических траекториях величину $\mathcal{E}$ в механике называют энергией системы, а частные производные лагранжиана L по скоростям $\dot{q}_a$ — импульсами p_a , сопряженными с координатами q_a . Таким образом, импульсы и энергия простых систем определяются соотношениями

$$p_a = \partial L / \partial \dot{q}_a, \quad \mathcal{E} = \sum_a p_a \dot{q}_a - L. \quad (115)$$

Предупреждение: введенное сейчас понятие импульса не следует путать с обозначаемой тем же словом величиной, о которой пойдет речь ниже при обсуждении “законов сохранения энергии и импульса” в задачах теоретической механики сплошной среды. Конечно, такое совпадение названий принципиально различных величин неудобно и может вести к недоразумениям. Но оно традиционное, так что мы не будем его менять.

Теоретическая механика сплошной среды. Тензор энергии-импульса для произвольного поля. Приводимые ниже рассуждения аналогичны выводу закона сохранения энергии для простых систем. Допустим, что плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ (определения см. в предыдущем разделе, термин “плотность” всегда обозначает “объемную плотность”) не зависит явно от четырехмерных координат: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \partial q)$. Рассмотрим значения этой величины на решениях уравнений движения (108) и вычислим производную $\partial_\alpha \mathcal{L}$:

$$\partial_\alpha \mathcal{L} = \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \partial_\alpha q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta q_a)} \partial_\alpha (\partial_\beta q_a) \right]$$

(по повторяющемуся индексу β , как обычно, суммирование). Подставив в полученное выражение известную из (108) величину $\partial \mathcal{L} / \partial q_a$ с заменой $\alpha \rightarrow \beta$ индекса суммирования в (108), получаем:

$$\partial_\alpha \mathcal{L} = \sum_a \left[\partial_\alpha q_a \cdot \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta q_a)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta q_a)} \partial_\beta (\partial_\alpha q_a) \right].$$

Ясно, что два слагаемых складываются в производную произведения:

$$\partial_\alpha \mathcal{L} = \partial_\beta \sum_a \left[\partial_\alpha q_a \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta q_a)} \right]. \quad (116)$$

До сих пор мы, в сущности, просто повторяли приведенные ранее для простых систем выкладки. Но теперь появляется небольшое различие: для простых систем вместо ∂_α и ∂_β мы имели d/dt , так что искомым результатом получался просто переносом всех вкладов в правую часть. То же самое мы хотим сделать и теперь, но сначала выполним в (116) замену $\partial_\alpha \mathcal{L} = \delta_\alpha^\beta \partial_\beta \mathcal{L}$, где δ — символ Кронекера. Тогда ∂_β становится “общим множителем” и уравнение (116) можно переписать в виде

$$\partial_\beta T_\alpha^\beta = 0, \text{ где } T_\alpha^\beta \equiv \sum_a \left[\partial_\alpha q_a \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta q_a)} \right] - \delta_\alpha^\beta \mathcal{L}. \quad (117)$$

Величину T_α^β называют тензором энергии-импульса, а первое равенство (117) выражает, как будет показано ниже, законы сохранения для этих величин.

Для упрощения записи в (117) удобно поднять вверх свободный индекс α , перейдя к контравариантной версии $T^{\alpha\beta}$ тензора T . При этом следует учесть, что символ Кронекера δ_α^β — просто “смешанная версия” g_α^β

метрического тензора (см. одно из замечаний в конце п. 2.8), так что при подъеме в нем индекса α мы получаем просто $g^{\alpha\beta}$:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \text{ где } T^{\alpha\beta} \equiv \sum_a \left[\partial^\alpha q_a \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta q_a)} \right] - \delta^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (118)$$

Это и будем считать окончательной записью законов сохранения и тензора энергии-импульса для произвольного поля (или системы полей) q .

Физический смысл компонент тензора энергии-импульса. Законы сохранения энергии и импульса. Как уже подробно пояснялось в п. 1.5, для сплошной среды, в отличие от простых систем, закон сохранения выражается не утверждением типа “величина не зависит от времени”, а дифференциальным уравнением типа (11), выражающим закон сохранения электрического заряда. Это уравнение, в ковариантной записи принимающее вид (90) с J^α из (86), можно принять как эталон для любых законов сохранения такого типа:

$$\partial_0(\text{сх плотность величины}) + \partial_i(\text{плотность потока той же величины}) = 0. \quad (119)$$

В нашем случае мы имеем в (118) четыре таких уравнения для четырех возможных значений 0, 1, 2, 3 свободного индекса α . По определению, четыре соответствующие сохраняющиеся величины называют энергией ($\alpha = 0$) и импульсом ($\alpha = 1, 2, 3$). Еще раз напомним, что этот импульс не имеет ничего общего с определенными в (115) величинами.

Рассмотрим сначала наше уравнение (118) для $\alpha = 0$: $\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{0i} = 0$. Исходя из (119), мы считаем, что величина T^{00} должна иметь смысл плотности энергии, а T^{0i} — плотности потока энергии, все это с точностью до возможных коэффициентов типа c в (119). Для фиксации этих коэффициентов рассмотрим величину T^{00} в (118):

$$T^{00} \equiv \sum_a \left[\partial^0 q_a \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q_a)} \right] - \mathcal{L}, \quad (120)$$

где учтено равенство $g^{00} = 1$. Поскольку $x^0 = ct$, обе производные ∂^0 и ∂_0 в (120) можно заменить на ∂_t (множители “ c ” взаимно сокращаются), так что выражение под знаком суммы в (120) можно перенести в виде $\dot{q}_a \partial \mathcal{L} / \partial(\dot{q}_a)$. Сравнив полученное выражение (120) с определением энергии (114) и учитывая, что теперь мы имеем дело не с самим лагранжианом L , а с его плотностью $\mathcal{L}$, заключаем, что величину T^{00} естественно считать просто плотностью энергии без добавочного коэффициента:

T^{00} = плотность энергии. Тогда для приведения нашего уравнения $\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{0i} = 0$ к стандартному виду (119) его нужно умножить на c , после чего под знаком ∂_i окажется величина cT^{0i} , которую и следует поэтому признать вектором (по группе O_3) плотности потока энергии: $cT^{0i} = \vec{S}_i \equiv$ плотность потока энергии.

Рассмотрим теперь три остальных уравнения (118): $\partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = 0$. По общему правилу (119) компоненты T^{i0} с точностью до коэффициента являются плотностями некоторых трех сохраняющихся величин, которые принято называть “компонентами вектора импульса” и обозначать в трехмерной записи через $\vec{p}_i$. Подчеркнем, что “импульс” в таком понимании существует лишь в задачах теории сплошной среды, а его сохранение — следствие инвариантности функционала действия S относительно пространственных трансляций его функционального аргумента $q(x)$ при отсутствии явной зависимости от x в плотности лагранжиана подобно тому, как сохранение энергии — следствие инвариантности относительно временных трансляций. Все это следует из общей теоремы Нетер, которая утверждает, что инвариантность действия относительно любой группы непрерывных преобразований влечет наличие соответствующей сохраняющейся величины.

Итак, с пространственными трансляциями, о которых можно говорить (в отличие от временных) только в задачах теории сплошной среды, связана новая сохраняющаяся величина — импульс $\vec{p}$. Его размерность считают такой же, как и для обычных импульсов (115), поэтому по размерности “импульс = энергия/скорость”. Учитывая, что все компоненты любого тензора, в частности $T^{\alpha\beta}$, должны иметь одинаковую размерность (поскольку коэффициенты в преобразованиях Лоренца безразмерны), и уже зная, что T^{00} = плотность энергии, естественно определить плотности компонент импульса соотношением $\vec{p}_i = T^{i0}/c$ для получения правильной размерности. Тогда $T^{i0} = c\vec{p}_i$ плотность импульса, так что в уравнении $\partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = 0$ первое слагаемое по записи точно соответствует (119), следовательно, под знаком дивергенции ∂_k во втором слагаемом стоят соответствующие “плотности потоков компонент импульса”. Их совокупность T^{ik} (матрица 3×3) принято называть “тензором натяжений”, строки этой матрицы — плотности потоков соответствующих компонент импульса.

Резюмируя все сказанное, заключаем, что в законах сохранения (118) фигурируют следующие величины (плотность энергии обозначим через W):

$$\begin{aligned} W &\equiv \text{плотность энергии} = T^{00}, \\ \vec{S}_i &\equiv \text{вектор плотности потока энергии} = cT^{0i}, \\ \vec{p}_i &\equiv \text{вектор плотности компонент импульса} = T^{i0}/c, \\ \text{тензор напряжений} &= T^{ik}. \end{aligned} \quad (121)$$

Мы называем величины $\vec{S}$ и $\vec{p}$ векторами, имея в виду группу O_3 (оба вектора истинные). На группе Лоренца эти величины не векторы, а компоненты тензора второго ранга $T^{\alpha\beta}$.

Симметризация тензора энергии-импульса. С точки зрения физики определение сохраняющихся величин всегда содержит произвол — возможность добавки любой другой заведомо сохраняющейся величины. Например, к определенной соотношениями (114), (115) энергии $\mathcal{E}$ в механике можно добавить любую константу, и новая величина $\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \text{const}$ также будет сохраняющейся, так что мы могли бы назвать и ее, по определению, энергией системы. Таким образом, конкретный выбор подобных величин всегда содержит в себе “элемент соглашения”.

Вернемся теперь к нашим законам сохранения (118). Аналогом добавки константы к энергии $\mathcal{E}$ является добавка к $T^{\alpha\beta}$ такого тензора $\Delta T^{\alpha\beta}$, который автоматически удовлетворяет законам сохранения $\partial_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = 0$, так что новый тензор $\bar{T} = T + \Delta T$ можно с тем же правом использовать в законах сохранения, как и исходный тензор T из (118). Возможность добавки ΔT отражает произвол в определении понятий энергии и импульса для таких задач.

Добавкой нужного типа является величина $\partial_\lambda f^{\alpha\beta\lambda}$ с любым антисимметричным по индексам $\beta\lambda$ тензором $f^{\alpha\beta\lambda}$:

$$\Delta T^{\alpha\beta} = \partial_\lambda f^{\alpha\beta\lambda}, \quad f^{\alpha\beta\lambda} = -f^{\alpha\lambda\beta}, \quad (122)$$

которая автоматически удовлетворяет пущному закону сохранения: $\partial_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta \partial_\lambda f^{\alpha\beta\lambda} = 0$ как свертка симметричной по индексам $\beta\lambda$ операции $\partial_\beta \partial_\lambda$ с антисимметричным по условию тензором $f^{\alpha\beta\lambda}$.

Утверждение: выбором подходящей добавки типа (122) к исходному тензору $T^{\alpha\beta}$ (118) можно получить симметричный по индексам $\alpha\beta$ тензор

$\bar{T}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \Delta T^{\alpha\beta}$. Он и считается окончательным “каноническим” выражением для тензора энергии-импульса, которое и используется в качестве определения соответствующих сохраняющихся величин. Сразу отметим, что для симметричного тензора из равенства $\bar{T}^{0i} = \bar{T}^{i0}$ и соотношений (121) вытекает простая связь между векторами плотности импульса и плотности потока энергии: $\bar{S}_i = c^2 \bar{p}_i$.

Мы не будем доказывать приведенное выше общее утверждение, поскольку наш предмет — электродинамика, а для нее искомую добавку типа (122) мы построим явно (см. ниже).

Тензор энергии-импульса в электродинамике. Плотность энергии и плотность потока энергии. В п. 2.15 было показано, что электродинамика укладывается в рамки теоретической механики сплошной среды. Ее обобщенными координатами q являются четырехмерные потенциалы A , а плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ определяется соотношением (110). В него входят источники $J_\alpha(x)$, считающиеся фиксированными параметрами, и через них в $\mathcal{L}$ вносится явная зависимость от четырехмерных координат x . Поскольку сохранение энергии и импульса имеет место лишь для систем без явной зависимости от x в $\mathcal{L}$, мы будем рассматривать только свободное электромагнитное поле без источников, для которого $\mathcal{L}$ — первое слагаемое в (110): $\mathcal{L} = -F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/16\pi$, где $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Мы хотим найти для этой системы соответствующий тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$ (118). Подставив в (118) $\{q_a\} = \{A_\lambda\}$, конкретизируем вид $T^{\alpha\beta}$ для данной задачи:

$$T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A_\lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{(\partial_\beta A_\lambda)} - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (123)$$

Мы опустили знак суммирования в (118), поскольку он учитывается автоматически повторением греческого индекса λ . Входящая в (123) частная производная $\mathcal{L}$ известна из (112): $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\beta A_\lambda) = -F^{\beta\lambda} / 4\pi$, поэтому

$$T^{\alpha\beta} = -\partial^\alpha A_\lambda \cdot F^{\beta\lambda} / 4\pi - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} / 16\pi. \quad (124)$$

Первое слагаемое в (124) несимметрично относительно перестановки индексов $\alpha\beta$, поэтому будем искать нужную для симметризации T добавку типа (122). Для этого воспользуемся следующей цепочкой преобразований для входящей в (124) величины: $\partial^\alpha A_\lambda \cdot F^{\beta\lambda} = \partial^\alpha A^\mu g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda} = [\partial^\alpha A^\mu - \partial^\mu A^\alpha + \partial^\mu A^\alpha] g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda} = F^{\alpha\mu} g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda} + \partial^\mu A^\alpha g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda}$. Мы получили два вклада, которые обозначим для краткости $N1$ и $N2$. Слагаемое $N1 = F^{\alpha\mu} g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda}$ симметрично по $\alpha\beta$, в чем легко убедиться,

сделав в нем перестановку индексов $\alpha\beta$ и сопроводив ее перестановкой индексов суммирования $\mu\lambda$. Рассмотрим теперь второе слагаемое $N_2 = \partial^\mu A^\alpha g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda}$ и покажем, что его можно просто отбросить. Действительно, $N_2 = \partial^\mu A^\alpha g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda} = \partial_\lambda A^\alpha \cdot F^{\beta\lambda} = \partial_\lambda [A^\alpha F^{\beta\lambda}] - A^\alpha \partial_\lambda F^{\beta\lambda}$. Здесь два вклада, второй равен нулю в силу уравнений движения (94) для свободной теории ($J = 0$), а первый при учете антисимметрии F имеет вид (122), следовательно, может быть отброшен как “допустимый произвол” (его можно добавить с обратным знаком к исходному выражению).

Таким образом, мы заключаем, что подходящая (и известная) добавка типа (122) к исходному выражению (124) приводит к замене в нем величины $\partial^\alpha A_\lambda \cdot F^{\beta\lambda}$ на $F^{\alpha\mu} g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda}$. В итоге получаем:

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = -F^{\alpha\mu} g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda} / 4\pi - g^{\alpha\beta} \mathcal{L} \quad (125)$$

с $\mathcal{L}$ из (124). Выражение (125) — окончательный ответ для канонического симметричного тензора энергии-импульса свободного электромагнитного поля в ковариантных обозначениях, который и используется при определении понятий энергии и импульса в электродинамике. Отметим, что тензор (125) выражается только через F , т. е. через напряженности, поэтому является калибровочно-инвариантным, в отличие от исходного выражения (124). Так и должно быть по “здравому смыслу”: если мы хотим считать энергию и импульс реально измеримыми величинами, то они должны выражаться через измеримые напряженности E и H и не зависеть от произвола выбора калибровки потенциалов.

Все дальнейшее — расшифровка (125) в обычных трехмерных обозначениях через напряженности E и H . Мы не будем ставить над этими величинами знак “→”, поскольку они всегда понимаются только как трехмерные векторы.

Прежде всего, рассмотрим входящую в (125) плотность лагранжиана $\mathcal{L}$. С учетом выражения F через напряженности (80) и $F^{00} = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 16\pi = -[F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ik} F^{ik}] / 16\pi = \\ &= -[-E_i E_i - E_i E_i + \varepsilon_{ikl} H_l \varepsilon_{ikp} H_p] / 16\pi. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой свертки двух ε по паре индексов $\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{ikp} = 2\delta_{lp}$, получаем:

$$\mathcal{L} = (E^2 - H^2) / 8\pi. \quad (126)$$

Рассмотрим теперь входящую в (125) величину

$$N^{\alpha\beta} = F^{\alpha\mu} g_{\mu\lambda} F^{\beta\lambda} \quad (127)$$

и вычислим ее компоненты N^{00} , $N^{0i} = N^{i0}$ и N^{ik} . Из соотношений (80) с учетом $F^{00} = 0$ и явного вида (38) метрического тензора $g_{\mu\lambda}$ (из него следует, что двойная сумма по $\mu\lambda$ в (127) сводится к вкладу "00" со знаком "плюс" и вкладу типа "kk" со знаком "минус" и с произвольным, но обязательно новым обозначением для латинского индекса суммирования) имеем:

$$\begin{aligned} N^{00} &= F^{0\mu} g_{\mu\lambda} F^{0\lambda} = -F^{0i} F^{0i} = -E_i E_i = -E^2, \\ N^{0i} &= F^{0\mu} g_{\mu\lambda} F^{i\lambda} = -F^{0k} F^{ik} = -E_k \varepsilon_{ikl} H_l = -[E \times H]_i, \\ N^{ik} &= F^{i\mu} g_{\mu\lambda} F^{k\lambda} = F^{i0} F^{k0} - F^{ip} F^{kp} = E_i E_k - \varepsilon_{ipl} H_l \varepsilon_{kps} H_s = \\ &= E_i E_k - (\delta_{ik} \delta_{ls} - \delta_{is} \delta_{lk}) H_l H_s = E_i E_k + H_i H_k - \delta_{ik} H^2. \end{aligned}$$

При вычислении последнего выражения мы воспользовались известной (см. п. 1.2) формулой свертки двух ε по индексу p .

Компоненты тензора (125) выражаются через компоненты (127) следующим образом (учитываем равенства $g^{00} = 1$, $g^{0i} = 0$, $g^{ik} = -\delta_{ik}$):

$$\begin{aligned} \bar{T}^{00} &= -N^{00}/4\pi - \mathcal{L}, \\ \bar{T}^{0i} &= -N^{0i}/4\pi, \\ \bar{T}^{ik} &= -N^{ik}/4\pi + \delta_{ik} \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{128}$$

Через них по общим правилам (121) с заменой в них $T \rightarrow \bar{T}$ (см. выше) находятся искомые величины: плотность энергии $W = \bar{T}^{00}$, вектор плотности потока энергии $\vec{S}_i = c\bar{T}^{0i}$, вектор плотности импульса $\vec{p}_i = c^{-2}\vec{S}_i$ и тензор натяжений $\bar{T}^{ik}$. Подставив в (128) известное из (126) выражение для $\mathcal{L}$ и приведенные выше значения компонент тензора $N^{\alpha\beta}$, получаем:

$$\begin{aligned} \text{плотность энергии } W &= (E^2 + H^2)/8\pi, \\ \text{вектор плотности потока энергии } \vec{S}_i &= (c/4\pi)[E \times H]_i, \\ \text{вектор плотности компонент импульса } \vec{p}_i &= c^{-2}\vec{S}_i, \\ \text{тензор натяжений } \bar{T}^{ik} &= \delta_{ik}(E^2 + H^2)/8\pi - (E_i E_k + H_i H_k)/4\pi. \end{aligned} \tag{129}$$

Это и есть окончательные ответы для интересующих нас величин в трехмерных обозначениях. Напомним, что пока что речь идет только о полях в вакууме и всегда используется гауссова система единиц.

2.17 Элементы релятивистской динамики точечной частицы. Сила Лоренца

Релятивистский лагранжиан свободной частицы. С точки зрения теоретической механики точечная частица относится к классу “простых систем”, роль q играют трехмерные координаты частицы $\vec{x}$, а $\dot{q} = d\vec{x}/dt = \vec{v}$ — ее скорость. В нерелятивистской теории лагранжианом свободной частицы считается выражение $L = mv^2/2$, по нему из общих формул (115) находятся соответствующий импульс $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$ и энергия $\mathcal{E} = L = mv^2/2$. Уравнения движения (106) для данной системы эквивалентны $d\vec{v}/dt = 0$, их решения $\vec{v} = \text{const}$. Сразу отметим, что такие же уравнения получаются для любого лагранжиана L , зависящего только от скорости $\vec{v}$. Требование $L = L(\vec{v})$ для свободной частицы — один из постулатов, используемых для определения вида L .

Второй постулат — требование релятивистской ковариантности, которое мы хотим ввести в рассматриваемую задачу. Прежде всего нужно дать ему точную формулировку для нашей системы. В качестве образца у нас пока что есть единственный пример — релятивистски-ковариантная формулировка электродинамики в терминах теоретической механики. Там мы имели дело со следующими величинами (см. (107)): плотность лагранжиана $\mathcal{L}$, сам лагранжиан $L = \int d^3x \mathcal{L}$ и функционал действия $S = \int dt L = c^{-1} \int d^4x \mathcal{L}$. Релятивистская ковариантность проявляется в том, что $\mathcal{L}$ — лоренц-скаляр (уточнение “скалярное поле” опускаем), поскольку выражение (110) для $\mathcal{L}$ — “правильные свертки правильных объектов”. Но для простых систем типа точечной частицы понятия $\mathcal{L}$ не существует, первичным объектом для них является лагранжиан L . В электродинамике $L = \int d^3x \mathcal{L}$, и эта величина не является лоренц-инвариантной ввиду неинвариантности дифференциала трехмерного объема $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$. Инвариантным является четырехмерный дифференциал $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, поскольку при преобразованиях Лоренца $x \rightarrow x' = \Lambda x$ якобиан $d^4x'/d^4x = \det \Lambda = 1$ для собственных преобразований. Отсюда следует, что в электродинамике лоренц-скалярами являются плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ и функционал действия $S = c^{-1} \int d^4x \mathcal{L}$, а также его дифференциал $dS = c^{-1} d^4x \mathcal{L}$, а лагранжиан L — не скаляр.

Таким образом, по аналогии с электродинамикой условие релятивистской ковариантности для простых систем нужно понимать

как требование лоренц-инвариантности действия $S = \int dt L$ и его дифференциала $dS = L dt$. Нерелятивистский лагранжиан свободной частицы $L = mv^2/2$ этому требованию не удовлетворяет (это будет очевидно из дальнейшего), поэтому выражение для L должно быть как-то модифицировано. Для определения нужного выражения для L в нашем распоряжении имеются следующие два требования:

1. Лагранжиан зависит только от скорости: $L = L(\vec{v})$.

2. Дифференциал действия $dS = L dt$ — лоренц-скаляр. Первое требование означает, что частица свободная, т. е. соответствующие уравнения движения (106) эквивалентны $d\vec{v}/dt = 0$, а второе — дополнительное условие релятивистской ковариантности, которого не было в нерелятивистской механике.

Покажем теперь, что эти два требования однозначно определяют вид $L(\vec{v})$ с точностью до множителя.

Переходя к доказательству, прежде всего заметим, что все входящие в $dS = L(\vec{v})dt$ величины выражаются через компоненты одного четырехмерного вектора dx^α ($x^0 = ct, x^i = \vec{x}_i$): $dt = c^{-1}dx^0$, $\vec{v}_i = cdx^i/dx^0$. Теперь поставим вопрос: как построить лоренц-скаляр из одного вектора dx^α ? Ответ очевиден: единственный простой скаляр — свертка $dx^\alpha dx_\alpha$, любой другой — функция от него (аналогия для группы O_3 : любой скаляр, который строится из одного вектора a_i , есть функция $f(a^2)$).

Таким образом, мы приходим к выводу, что инвариантное выражение для dS должно иметь следующий вид:

$$dS = L(\vec{v})dt = f(*), \quad (*) \equiv dx^\alpha dx_\alpha \quad (130)$$

с некоторой, пока неизвестной, функцией f .

Чтобы пайти ее явный вид, перепишем выражение (*) в трехмерных обозначениях (здесь и далее $v \equiv |\vec{v}|$):

$$dx^\alpha dx_\alpha = dx^0 dx^0 - dx^i dx^i = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2[1 - v^2/c^2]. \quad (131)$$

Учтем теперь, что величина dS линейна по dt , а выражение (131) — квадратично, следовательно, функция f в (130) может быть только квадратным корнем из (131) с точностью до множителя. Итого: $dS = L(\vec{v})dt = a dt[1 - v^2/c^2]^{1/2}$ с некоторым, пока неизвестным, числовым коэффициентом a . Отсюда для искомого лагранжиана $L(\vec{v})$ получаем:

$$L(\vec{v}) = a[1 - v^2/c^2]^{1/2}. \quad (132)$$

Коэффициент a можно найти из требования соответствия выражения (132) с нерелятивистской механикой, в которой $L = mv^2/2$. Для этого разложим выражение (132) в ряд по v^2/c^2 :

$$L(\vec{v}) = a[1 - v^2/2c^2 + \dots], \quad (133)$$

где многоточие — поправки высшего порядка по “малому параметру” v^2/c^2 . Ясно, что с нерелятивистским выражением $L = mv^2/2$ можно отождествить лишь вклад второго слагаемого в правой части (133), что приводит к равенству $a = -mc^2$ и к следующему окончательному выражению для искомого релятивистского лагранжиана L :

$$L(\vec{v}) = -mc^2[1 - v^2/c^2]^{1/2}. \quad (134)$$

Присутствие в разложении (133) первого слагаемого — константы $a = -mc^2$ — нельзя считать противоречием с формулами нерелятивистской механики, поскольку в уравнения движения (106) входят только производные L , в которых вклад аддитивной константы исчезает. В нерелятивистской механике фиксация такой константы — вопрос соглашения, а в релятивистской ее присутствие необходимо в силу требования лоренц-ковариантности. Ему удовлетворяет, как показано выше, только выражение (132), содержащее такую константу и не совпадающее с нерелятивистским выражением для L .

Импульс и энергия свободной частицы. Четырехмерная скорость и четырехмерный импульс. При известном лагранжиане импульс и энергия частицы определяются автоматически соотношениями (115). Подставив в них выражение (134) для L и вычислив производные по $\dot{q} = \vec{v}_i$, получим следующие выражения для импульса и энергии свободной частицы:

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i[1 - v^2/c^2]^{-1/2}, \quad \mathcal{E} = mc^2[1 - v^2/c^2]^{-1/2}. \quad (135)$$

При $c \rightarrow \infty$ имеем $\vec{p}_i = m\vec{v}_i + \dots$ и $\mathcal{E} = mc^2 + mv^2/2 + \dots$. Второе слагаемое в $\mathcal{E}$ — обычное, а первое — “энергия покоя” частицы, существование которой с необходимостью следует из требования релятивистской ковариантности.

Выражения (135) — окончательные ответы для импульса и энергии релятивистской свободной частицы в трехмерных обозначениях. Ясно, что они должны допускать и ковариантную запись, так как получены на основе принципа релятивистской инвариантности действия. Для получения такого представления определим сначала некоторые новые важные для дальнейшего величины.

Одна из них — лоренц-скаляр — *дифференциал собственного времени* $d\tau$, который определяется соотношением

$$d\tau = dt[1 - v^2/c^2]^{1/2}. \quad (136)$$

Из (131) и (136) следует, что $d\tau \propto (dx^\alpha dx_\alpha)^{1/2}$, отсюда очевидна лоренц-инвариантность $d\tau$. Сам термин “дифференциал собственного времени” можно пояснить аналогией между выражениями (62) и (136): $d\tau$ и dt в (136) связаны точно так же, как $\Delta t'$ и Δt в (62), т. е. $d\tau$ есть соответствующий dt интервал времени в системе отсчета, движущейся вместе с частицей.

Еще одно важное понятие — *четырёхмерная скорость*

$$u^\alpha = dx^\alpha/d\tau, \quad (137)$$

являющаяся контравариантным вектором (числитель — вектор, знаменатель — скаляр). По аналогии можно ввести величину $du^\alpha/d\tau$ — “четырёхмерное ускорение”, но в дальнейшем мы не будем иметь с ней дело.

Вычислим компоненты вектора (137) в трехмерных обозначениях. Для краткости обозначив $[1 - v^2/c^2]^{1/2} \equiv z$, имеем: $u^0 = dx^0/d\tau = cdt/zdt = c/z$, $u^i = dx^i/d\tau = d\vec{x}_i/zdt = \vec{v}_i/z$. Итого:

$$u^0 = c/z, \quad u^i = \vec{v}_i/z, \quad z \equiv [1 - v^2/c^2]^{1/2}. \quad (138)$$

С помощью этих соотношений легко найти свертку $u^\alpha u_\alpha$:

$$u^\alpha u_\alpha = u^0 u_0 - u^i u_i = c^2/z^2 - v^2/z^2 = c^2 \quad (139)$$

при учете явного вида z в (138).

Вернемся теперь к нашим выражениям (135) для энергии и импульса. Сравнивая их с величинами (138), получаем: $\mathcal{E} = mcu^0$, $\vec{p}_i = mu^i$. Отсюда следует, что величины $\mathcal{E}/c$ и $\vec{p}$ являются компонентами четырехмерного контравариантного вектора, просто связанного с u^α . Его обозначают через p^α и называют *четырёхмерным импульсом*:

$$p^0 = \mathcal{E}/c, \quad p^i = \vec{p}_i, \quad p^\alpha = mu^\alpha. \quad (140)$$

Последнее равенство (140) при учете (137) доказывает, что величина p^α — действительно контравариантный вектор.

Из (139) и (140) получаем соотношение

$$m^2 c^2 = m^2 u^\alpha u_\alpha = p^\alpha p_\alpha = p^0 p^0 - p^i p^i = \mathcal{E}^2 / c^2 - (\vec{p})^2, \quad (141)$$

позволяющее выразить энергию $\mathcal{E}$ через импульс $\vec{p}$.

Лагранжиан взаимодействия заряженной частицы с внешним полем: общий принцип его построения. Теперь мы переходим к новой задаче — получению уравнений движения заряженной частицы в заданном внешнем поле. Наша проблема — определение вида лагранжиана взаимодействия частицы с полем.

В общем случае при наличии двух взаимодействующих подсистем A и B полный лагранжиан L представляется в виде $L = L_A + L_B + L_{AB}$, где L_A и L_B — лагранжианы подсистем, L_{AB} — лагранжиан взаимодействия. В нашем случае $A \equiv$ поле, $B \equiv$ его источники J , движущаяся заряженная частица — частный случай источников.

Очень простая и очень важная для дальнейшего идея состоит в следующем: лагранжиан взаимодействия — единое понятие, не зависящее от того, “с какой стороны смотреть на вещи”. Другими словами, лагранжиан взаимодействия A с B есть та же величина, что и лагранжиан взаимодействия B с A , символически $L_{AB} = L_{BA}$.

Точная задача о взаимодействии поля с переменными источниками тина движущейся заряженной частицы весьма сложна, так как в этом случае в качестве динамических переменных нужно рассматривать обобщенные координаты обеих подсистем с неизбежным “сцеплением” для них в уравнениях движения. Но сейчас нас интересует упрощенный вариант этой полной точной задачи, в котором параметры одной из подсистем, а именно, поля считаются фиксированными, а динамическими переменными считаются лишь обобщенные координаты второй подсистемы — заряженной частицы. Но возможна и обратная постановка задачи, когда фиксированы координаты второй подсистемы, например, траектория движения заряженной частицы, а нас интересует создаваемое ею поле. Такую задачу мы также будем рассматривать впоследствии.

Сейчас нас интересует задача с фиксированным внешним полем и мы хотим найти соответствующий лагранжиан взаимодействия. Фактически ответ нам уже известен при учете сформулированной выше идеи симметрии $L_{AB} = L_{BA}$: из (110) мы знаем лагранжиан взаимодействия поля с произвольными фиксированными источниками и он же должен быть лагранжианом взаимодействия источников с фиксированным полем. Реализуя эту идею, из (110) получаем:

$$L_{\text{вз}} = \int d^3x \mathcal{L}_{\text{вз}} = -c^{-1} \int d^3x J_\alpha A^\alpha.$$

Подставив сюда выражения для A и J в трехмерных обозначениях (76), (86) с учетом $J_\alpha A^\alpha = J^0 A^0 - J^i A^i$ находим:

$$L_{\text{вз}} = -c^{-1} \int d^3x [c\rho\varphi - \vec{j}_i \vec{A}_i] = \int d^3x [-\rho\varphi + (\vec{j} \vec{A})/c]. \quad (142)$$

Здесь φ и $\vec{A}$ — потенциалы внешнего поля — некоторые заданные функции от $x = t, \vec{x}$, а $\rho(x)$ и $\vec{j}(x)$ — объемные плотности заряда и тока для нашего источника — движущейся точечной заряженной частицы. Наша следующая задача — найти явные выражения для этих величин, которые нужно затем подставить в (142).

Плотности заряда $\rho(t, \vec{x})$ и тока $\vec{j}(t, \vec{x})$ для движущейся точечной заряженной частицы. Рассмотрим сначала статическую задачу: пусть точечный заряд e находится в точке $\vec{a}$ трехмерного пространства. Вопрос: как записать соответствующую плотность заряда $\rho(\vec{x})$? Сразу ясно, что это не обычная функция, так как по смыслу она должна быть отличной от нуля только в одной точке $\vec{a}$, но при этом интеграл от нее должен быть отличным от нуля и равным заряду e (что невозможно для обычных функций при обычном определении интеграла). Такие “необычные функции” называют обобщенными. Их можно рассматривать на пространстве любой размерности, поэтому при их обсуждении мы будем опускать знак “ $\rightarrow$ ” у координат, понимая их как величины произвольной размерности.

Эталоном обобщенных функций является знаменитая δ -функция Дирака $\delta(x - a)$, которая с точки зрения физики представляет объемную плотность $\rho(x)$ единичного точечного заряда, расположенного в точке a :

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq a, \\ \infty & \text{при } x = a. \end{cases} \quad (143)$$

При этом “бесконечность” в точке a должна быть “столь мощной”, что одна эта точка дает конечный вклад в интеграл:

$$\int_V dx \delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \notin V, \\ 1 & \text{при } a \in V. \end{cases} \quad (144)$$

Будем называть a “точкой сосредоточения” δ -функции. Равенства (143), (144) означают, что интеграл от δ -функции равен единице, если ее точка сосредоточения находится внутри области интегрирования V , и нулю в противном случае. Образно говоря, интеграл набирается только от одной точки a , точнее, от ее окрестности сколь угодно малого размера. Отсюда ясно, как можно вычислить интеграл $\int dx f(x) \delta(x - a)$ с любой непрерывной в окрестности точки a функцией $f(x)$, поскольку в малой (причем “сколь угодно”) окрестности точки a непрерывную функцию $f(x)$ можно просто заменить ее значением в точке a :

$$\int dx f(x) \delta(x - a) = f(a). \quad (145)$$

Это правило следует считать постулатом, который в математике считается просто определением δ -функции, понимаемой как функционал на пространстве непрерывных функций: каждой такой функции $f(x)$ по правилу (145) ставится в соответствие число $f(a)$. Конечно, соотношение (145) можно просто постулировать, но для его понимания полезно приведенное выше истолкование δ -функции как объемной плотности единичного точечного заряда ввиду его наглядности. Ясно, что для заряда e нужно просто умножить δ -функцию на e .

Вернемся теперь к нашей конкретной задаче в трехмерном пространстве: что есть ρ и $\vec{j}$ для точечного заряда e , движущегося по траектории $\vec{r}(t)$? Ответ для ρ очевиден: поскольку в каждый данный момент времени t частица находится в заданной точке $\vec{r}(t)$, ясно, что мы должны положить $\rho(t, \vec{x}) = e \delta(\vec{x} - \vec{r}(t))$. Отсюда легко найти и соответствующую плотность тока $\vec{j}$, исходя из того соображения, что для потока заряженных частиц объемная плотность тока является произведением плотности заряда на скорость движения частиц. Итого, мы приходим к следующим формулам:

$$\rho(t, \vec{x}) = e \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)), \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = e \vec{v}(t) \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)), \quad \vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt. \quad (146)$$

Это и есть искомые выражения для объемных плотностей заряда и тока для точечной частицы с зарядом e , движущейся по траектории $\vec{r}(t)$.

Лагранжиан взаимодействия частицы с полем: явный вид. Энергия и импульс для частицы в поле. Вернемся к выражению (142) для лагранжиана взаимодействия и подставим в него известные из (146) плотности ρ и $\vec{j}$. Поскольку они содержат трехмерную δ -функцию,

трехмерный интеграл $\int d^3x \dots$ в (142) “снимается” по правилу интегрирования (145) (потенциалы φ и $\vec{A}$ в (142) считаем непрерывными функциями, а координаты x и a в (145) — трехмерными векторами). Например, для интеграла от $\rho\varphi$ имеем: $\int d^3x \rho(t, \vec{x}) \varphi(t, \vec{x}) = e \int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \varphi(t, \vec{x}) = e\varphi(t, \vec{r}(t))$ согласно правилу (145). Точно так же вычисляется интеграл от $(\vec{j}\vec{A})$, и в итоге получаем:

$$L_{\text{вз}} = e[-\varphi + (\vec{v}\vec{A})/c] \Big|_{\vec{x}=\vec{r}(t)}. \quad (147)$$

В этой записи у потенциалов φ , $\vec{A}$ подразумеваются аргументы $t, \vec{x}$, аргумент $\vec{x}$ затем заменяется на координату частицы $\vec{r}(t)$, а $\vec{v} = d\vec{r}(t)/dt$. После вычисления интеграла нам уже не нужно различать переменные $\vec{x}$ и $\vec{r}(t)$, поэтому в дальнейшем будем записывать выражение (147) в виде

$$L_{\text{вз}} = -e\varphi + e(\vec{v}\vec{A})/c, \quad (148)$$

понимая $\vec{x}$ в аргументах потенциалов $t, \vec{x}$ как переменную координату частицы, а $\vec{v}$ — как ее скорость. Соотношение (148) — окончательный ответ для лагранжиана взаимодействия частицы с полем.

Полный лагранжиан L для частицы, взаимодействующей с полем, есть

$$L = L_{\text{част}} + L_{\text{вз}}, \quad (149)$$

первое слагаемое известно из (134), второе — из (148).

Энергия и импульс частицы в поле находятся по известному лагранжиану (149) из общих формул (115). Для сокращения записи будем обозначать через $\mathcal{E}$, $\vec{p}$ известные из (135) величины для свободной частицы, а аналогичные величины для частицы в поле — теми же буквами с дополнительным знаком “штрих”. Для единообразия тогда и в (149) будем писать L' вместо L , а через L будем обозначать лагранжиан свободной частицы (134):

$$L' = L + L_{\text{вз}} = L - e\varphi + e(\vec{v}\vec{A})/c. \quad (150)$$

Тогда из соотношений (115) с $\dot{q} = \{\vec{v}_i\}$ получаем:

$$\begin{aligned} \vec{p}'_i &= \vec{p}_i + \partial L_{\text{вз}} / \partial \vec{v}_i = \vec{p}_i + e\vec{A}_i/c, \\ \mathcal{E}' &= \vec{p}'_i \vec{v}_i - L' = (\vec{p}_i + e\vec{A}_i/c) \vec{v}_i - (L + L_{\text{вз}}) = \\ &= \mathcal{E} + e(\vec{v}\vec{A})/c - L_{\text{вз}} = \mathcal{E} + e\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, энергия $\mathcal{E}'$ и импульс $\vec{p}'$ для частицы в заданном внешнем поле определяются следующими соотношениями:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + e\varphi, \quad \vec{p}' = \vec{p} + e\vec{A}/c, \quad (151)$$

в которых $\mathcal{E}$ и $\vec{p}$ — известные величины (135) для свободной частицы.

В обозначениях (76), (140) формулы (151) принимают вид

$$p'^\alpha = p^\alpha + eA^\alpha/c. \quad (152)$$

Это ковариантная запись соотношений (151).

Уравнения движения частицы в поле. Сила Лоренца. Рассмотрим теперь уравнения движения (106) для заряженной частицы в заданном внешнем поле. Роль L в (106) теперь будет играть полный лагранжиан L' из (150), $q \equiv \{\vec{x}_i\}$, $\dot{q} \equiv \{\vec{v}_i = d\vec{x}_i/dt\}$. Конкретизируя уравнения (106) для нашей задачи, получаем:

$$\frac{d}{dt}[\partial L'/\partial \vec{v}_i] = \partial L'/\partial \vec{x}_i. \quad (153)$$

Для L' из (150) имеем $\partial L'/\partial \vec{v}_i = \vec{p}_i + e\vec{A}_i/c$ согласно (115) и (151), поэтому уравнения (153) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}_i + e\vec{A}_i/c] = \partial L'/\partial \vec{x}_i, \quad (154)$$

где $\vec{p}_i$ — импульс свободной частицы (135). Явная зависимость от координат $\vec{x}$ в L' содержится только в потенциалах. Поэтому из (150) имеем:

$$\partial L'/\partial \vec{x}_i = \partial L_{\text{вз}}/\partial \vec{x}_i = -e\partial_i\varphi + e\vec{v}_k\partial_i\vec{A}_k/c, \quad (155)$$

где $\partial_i \equiv \partial/\partial \vec{x}_i$ — частная производная по координатам.

Величина $d\vec{A}_i/dt$ в левой части (154) — полная производная по времени, учитывающая как явную, так и неявную (через $\vec{x}(t)$) зависимость потенциала $\vec{A}$ от времени. Поэтому:

$$d\vec{A}_i/dt = \partial_t \vec{A}_i + \vec{v}_k \partial_k \vec{A}_i, \quad (156)$$

где $\vec{v}_k = d\vec{x}_k/dt$ — скорость частицы, ∂_t — частная производная по времени.

Подставив в уравнения (154) выражения (155), (156) и перенеся вклад с $d\vec{A}_i/dt$ в правую часть, получим:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{p}_i &= -e\partial_i\varphi - e\partial_t\vec{A}_i/c - e\vec{v}_k\partial_k\vec{A}_i/c + e\vec{v}_k\partial_i\vec{A}_k/c = \\ &= e(-\partial_i\varphi - \partial_t\vec{A}_i/c) + e\vec{v}_k(\partial_i\vec{A}_k - \partial_k\vec{A}_i)/c.\end{aligned}\quad (157)$$

Из сопоставления с формулами (13) для напряженностей ясно, что два первых вклада в правой части (157) выражаются через напряженность электрического поля $\vec{E}_i = -\partial_i\varphi - \partial_t\vec{A}_i/c$, а два последних — через напряженность магнитного поля $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ в силу вытекающего из определения ротора в п. 1.2 соотношения

$$\partial_i\vec{A}_k - \partial_k\vec{A}_i = \varepsilon_{ikl}[\text{rot } \vec{A}]_l = \varepsilon_{ikl}\vec{H}_l. \quad (158)$$

Таким образом, выражая правую часть уравнений (157) через напряженности, получаем окончательный ответ:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = e\vec{E} + e[\vec{v} \times \vec{H}]/c \equiv \vec{F}. \quad (159)$$

Правая часть — сила $\vec{F}$, действующая со стороны поля на частицу, ее называют “силой Лоренца”. Отметим, что в общем случае, по определению, сила есть производная импульса по времени, а известная из второго закона Ньютона формула “сила = масса $\times$ ускорение” — просто частный случай, поскольку в нерелятивистской механике импульс есть произведение массы на скорость. Отметим также, что сила Лоренца (159) выражается только через напряженности (хотя в промежуточных формулах мы имели дело с потенциалами), т. е. является калибровочно-инвариантной, как и должно быть, если речь идет о реально измеримой величине.

Из уравнений (159) нетрудно получить соответствующий “закон баланса энергии”, т. е. выражение для $d\mathcal{E}/dt$ с энергией $\mathcal{E}$ из (135). Действительно, пусть L — любой лагранжиан, зависящий только от скорости $\vec{v}$ (например, (134)), а импульсы $\vec{p}$ и энергия $\mathcal{E}$ определены по нему соотношениями (115) с $\dot{q} \equiv \{\vec{v}_i\}$. Тогда

$$d\mathcal{E}/dt = d[\vec{p}_i\vec{v}_i - L]/dt = (d\vec{p}_i/dt)\vec{v}_i + \vec{p}_i(d\vec{v}_i/dt) - (\partial L/\partial \vec{v}_i)(d\vec{v}_i/dt).$$

При учете определения $\vec{p}$ в (115) ясно, что два последних вклада взаимно сокращаются, а в первом $d\vec{p}_i/dt = \vec{F}_i$ по определению. Таким образом, для любых систем с лагранжианом L , зависящим только от скорости,

имеем $d\mathcal{E}/dt = (\vec{F}_i \vec{v}_i)$. Отсюда для нашей задачи с $\mathcal{E}$ из (135) и $\vec{F}$ из (159) с учетом ортогональности $\vec{v}$ и векторного произведения $[\vec{v} \times \vec{H}]$ получаем:

$$d\mathcal{E}/dt = (\vec{v}\vec{F}) = e(\vec{v}\vec{E}). \quad (160)$$

Таким образом, за изменение кинетической энергии частицы $\mathcal{E}$ ответственно лишь электрическое поле $\vec{E}$, а магнитное поле (причем любое, а не только однородное) ввиду ортогональности скорости $\vec{v}$ и векторного произведения $[\vec{v} \times \vec{H}]$ в (159) на величину $\mathcal{E}$ не влияет — оно приводит лишь к изменению направления вектора скорости, т. е. величина $\mathcal{E}$ в любом чисто магнитном поле не зависит от времени.

Из уравнений движения (159) нетрудно найти траекторию частицы в простых случаях однородного электрического или магнитного поля. При нерелятивистских скоростях $v \ll c$ в первом случае движение просто равноускоренное, во втором — по окружности (если $\vec{v} \perp \vec{H}$) или, в общем случае, по спирали с некоторой частотой вращения, которую называют “циклотроной”. Все это вопросы из школьного курса физики, в которых мы предлагаем читателю разобраться самостоятельно (и уметь на них ответить).

Ковариантная запись уравнений движения и уравнения баланса энергии. Из общих соображений ясно, что полученные выше уравнения движения (159) и уравнение баланса энергии (160) должны допускать ковариантную запись.

Попробуем сначала просто угадать ее вид исходя из соображений релятивистской ковариантности и общей структуры уравнений (159), (160). Их левые части — производные по времени от энергии $\mathcal{E}$ и импульса $\vec{p}$. “Ковариантным представителем” этих величин является четырехмерный импульс p^α (140), а для символа dt в производных — дифференциал собственного времени $d\tau$ (136), являющийся лоренц-скаляром. Таким образом, естественным кандидатом на роль левой части искомых уравнений является контравариантный вектор $dp^\alpha/d\tau$.

Переходя к правой части уравнений, воспользуемся лишь следующей известной из вида уравнений (159), (160) информацией общего характера: их правые части линейны по напряженностям и не содержат явной зависимости от пространственных координат x^α . “Ковариантный представитель напряженностей” — тензор поля F (79), компоненты которого связаны с напряженностями соотношениями (80). Чтобы получить в правой части контравариантный вектор, тензор F нужно свернуть по одному индексу с каким-нибудь вектором. Поскольку мы не можем использовать x^α

(см. выше), в нашем распоряжении имеются лишь вектор четырехмерной скорости (137) и четырехмерный импульс p^α (140). Но они, согласно (140), совпадают с точностью до множителя, так что независимым можно считать лишь один из них.

Выбрав в качестве такового импульс p^α (поскольку именно он входит в левые части уравнений), однозначно приходим к выводу, что искомая ковариантная запись уравнений (159), (160) должна иметь следующий вид:

$$dp^\alpha/d\tau = \text{const} \cdot F^{\alpha\beta} p_\beta \quad (161)$$

с p^α из (140) и $F^{\alpha\beta}$ из соотношений (80).

Мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно в эквивалентности ковариантных уравнений (161) и трехмерных уравнений (159), (160) и найти значение const в (161) (она равна e/mc).

Приведенный выше вывод уравнений (161) “из общих соображений” — еще один пример эффективности релятивистски-ковариантной формулировки, которая часто сама подсказывает вид ответов. И это последний пример, так как здесь мы заканчиваем главу 2 — релятивистски-ковариантную формулировку электродинамики. В дальнейшем мы будем рассматривать задачи электродинамики лишь в конкретной (= “нашей”) системе отсчета и в обычных трехмерных обозначениях без использования греческих индексов и терминологии тензоров на группе Лоренца. Для конкретных расчетов этого вполне достаточно, хотя, конечно, многие результаты, при желании, можно переписать в релятивистски-ковариантной форме.

Приведем в заключение обобщение понятия силы Лоренца на случай распределенных источников $\rho, \vec{j}$.

Сила Лоренца, действующая на распределенные источники. Допустим, что мы имеем дело с объемным распределением зарядов и токов $\rho, \vec{j}$ и поставим вопрос: чему равна сила Лоренца, действующая на некоторый бесконечно малый элемент среды? Ответ очевиден: бесконечно малый элемент среды можно понимать как точечный движущийся заряд, поэтому можно просто воспользоваться формулой (159) с должной интерпретацией входящих в нее величин. Для вклада с $\vec{E}$ это означает, что заряд частицы e нужно заменить на “дифференциал заряда” $dQ(x) = \rho(x)d^3x$, а во вкладе магнитного поля при учете связи $\vec{j} = \rho\vec{v}$ нужно сделать замену $e\vec{v} \rightarrow \vec{j}(x)d^3x$. Таким образом, при объемном распределении зарядов и токов для дифференциала силы $d\vec{F}$, действующий на бесконечно малый

дифференциал объема d^3x , из (159) получаем:

$$d\vec{F} = d^3x\{\rho\vec{E} + [\vec{j} \times \vec{H}]/c\}, \quad (162)$$

где ρ и $\vec{j}$ — объемные плотности заряда и тока. Коэффициент при дифференциале объема d^3x в (162) — объемная плотность силы Лоренца.

Если заряды и токи распределены не по объему, а по поверхности или линии (типичный пример — ток в контуре), то выражение (162) нужно модифицировать следующим образом:

$$d\vec{F} = \vec{E}dQ + [d\vec{J} \times \vec{H}]/c, \quad (163)$$

с должным пониманием величин dQ и $d\vec{J}$ в каждом конкретном случае. Величина dQ — дифференциал заряда, а $d\vec{J}$ за отсутствием общепринятого термина будем называть “дифференциалом полного тока”. Для объемного распределения $dQ = \rho d^3x$, $d\vec{J} = \vec{j} d^3x$, в иных случаях запись этих величин должным образом изменяется. В частности, для текущего по проводу тока $d\vec{J} = Id\vec{x}$, где I — величина тока (т. е. то, что измеряется в амперах), а $d\vec{x}$ — дифференциал для точки $\vec{x}$ на проводе, численно равный дифференциалу длины и направленный по касательной к проводу в точке $\vec{x}$ с указанным направлением движения тока ($I > 0$).

Таким образом, для “дифференциала полного тока” имеем:

$$d\vec{J} = \vec{j} d^3x \text{ (в объеме)}, \quad d\vec{J} = Id\vec{x} \text{ (для контура)}. \quad (164)$$

Мы будем ссылаться на эти формулы в дальнейшем. Соотношение (163) — пример геометрически-ковариантной записи с любым вариантом (объемным, поверхностным или линейным) распределения источников.

На этом мы кончаем вторую главу и переходим к более конкретным задачам электродинамики.

Глава 3

Статика

3.1 Основные соотношения

“Статикой” называют задачи, в которых все величины (источники, напряженности, потенциалы, о потенциалах см. замечание ниже) не зависят от времени t , поэтому вклады с ∂_t в любых динамических уравнениях можно отбросить. Начнем с того, что перепишем все основные соотношения из главы 1, отбрасывая в них все вклады с ∂_t . Тогда в исходных уравнениях Максвелла (1)–(4) исчезает “сцепление” между $\vec{E}$ и $\vec{H}$, и мы получаем два уравнения “электростатики”

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (165)$$

и два уравнения “магнитостатики”

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = (4\pi/c)\vec{j} \quad (166)$$

(напомним, что речь идет об уравнениях для полей в вакууме).

Интегральная формулировка этих уравнений получается из (6)–(9) отбрасыванием вкладов с ∂_t , что дает

$$\int dx_i E_i = 0, \quad \iint E_n ds = 4\pi \int dx \rho \equiv 4\pi Q_v \quad (167)$$

для электростатики и

$$\iint H_n ds = 0, \quad \int dx_i H_i = \frac{4\pi}{c} \iint j_n ds \equiv \frac{4\pi}{c} I_s \quad (168)$$

для магнитостатики (в интегральной записи уравнений с “div” подразумевается интегрирование по любому фиксированному объему с потоком наружу через ограничивающую его поверхность, а для уравнений с “rot” — по любой фиксированной незамкнутой поверхности с циркуляцией по ограничивающему ее контуру, см. п. 1.2). Как уже пояснялось в п. 1.3, с помощью второго соотношения (167) легко вычисляются поля для источников с простой симметрией (сферической, цилиндрической и т. п.), в частности, для точечного заряда.

Условия сшивания (10) для напряженностей остаются прежними, поскольку они одинаковы в динамике и статике (см. п. 1.4).

Уравнение непрерывности (11) в статике принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (169)$$

а формулы (13), связывающие напряженности с потенциалами (при условии их независимости от времени, см. ниже), принимают вид

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (170)$$

В калибровочных преобразованиях (16) для не зависящих от времени потенциалов функция $\Phi(t, \vec{x})$ должна иметь вид $\Phi(t, \vec{x}) = \text{const} \cdot t + \Phi(\vec{x})$, где $\Phi(\vec{x})$ зависит только от координат $\vec{x}$. Тогда калибровочные преобразования (16) принимают вид

$$\varphi' = \varphi + \text{const}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Phi \quad (171)$$

с произвольной const и произвольной функцией $\Phi(\vec{x})$.

Замечание о потенциалах: независимость от времени измеримых величин — источников и напряженностей — условие поставленной задачи. С потенциалами это не так, поскольку для них всегда можно выполнить калибровочное преобразование (16) с нетривиально зависящей от времени функцией $\Phi(t, \vec{x})$, внеся тем самым зависимость от времени в потенциалы и при этом не меняя статических напряженностей. Но с точки зрения классической электродинамики ничего нового таким путем получить нельзя, и всюду в дальнейшем (как и выше) мы будем считать, что потенциалы в статике не зависят от времени, поэтому будем ограничиваться калибровочными преобразованиями типа (171).

Уравнения (15) для не зависящих от времени потенциалов в произвольной калибровке принимают следующий вид:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \Delta\vec{A} - \vec{\nabla}(\operatorname{div} \vec{A}) = -(4\pi/c)\vec{j}. \quad (172)$$

Кулоновское калибровочное условие $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ (17) в статике совпадает с калибровочным условием Лоренца (18) и в такой калибровке уравнения (172) принимают вид

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \Delta\vec{A} = -(4\pi/c)\vec{j}. \quad (173)$$

Из их сравнения видно, что в данной калибровке уравнение для магнитного поля получается из уравнения для электрического поля следующей простой “стандартной заменой”

$$\varphi \rightarrow \vec{A}, \quad \rho \rightarrow \vec{j}/c, \quad (174)$$

которую мы часто будем использовать в дальнейшем.

3.2 Решение уравнения Пуассона

Неоднородное уравнение Лапласа типа (173) для φ :

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad (175)$$

называют “уравнением Пуассона”. Общее решение любого линейного неоднородного уравнения, в том числе и уравнения (175), есть, как известно (и очевидно) сумма его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Последнее в нашем случае — произвольная гармоническая функция, с точки зрения физики описывающая некоторое внешнее (т. е. не порождаемое источниками) поле. Нас интересует, естественно, частное решение, имеющее смысл поля, создаваемого самими источниками ρ . Для исключения вклада внешнего поля нужно наложить на потенциалы требование убывания на бесконечности, поскольку среди гармонических функций нет убывающих. В дальнейшем это будет предполагаться, если не указано противное. Сразу отметим, что для таких решений справедлив *принцип суперпозиции*: поле для суммы источников равно сумме полей, создаваемых каждым из них. Это очевидное следствие линейности уравнений.

Теперь условимся об обозначениях. Поскольку в этой главе мы не будем иметь дела с четырехмерными координатами x , примем для упрощения записи формул следующее *соглашение*: трехмерные пространственные координаты будем обозначать через $x, y, \dots$, опуская (как правило) уточняющий символ трехмерного вектора “ $\rightarrow$ ”. Символ $\int dx \dots$ будем понимать

как интеграл по трехмерному объему $\int d^3x$... без уточнения d^3x в записи дифференциала объема. Все объекты понимаются как трехмерные (никаких “ко.” и “контр.”), индексы обозначаются латинскими буквами и всегда ставятся снизу.

Итак, нас интересует убывающее на бесконечности частное решение уравнения Пуассона (175), описывающее поле, создаваемое самим источником. Ответ можно сразу получить из следующих элементарных соображений: каждый бесконечно малый элемент среды с объемным распределением ρ можно воспринимать как точечный заряд. Создаваемое им поле известно: $\varphi = Q/r$, где Q — заряд, r — расстояние от него до точки наблюдения. Если x — точка наблюдения, а dy — дифференциал объема среды вокруг точки y , то роль заряда играет величина $dQ(y) = \rho(y)dy$, а расстояние между данным зарядом и точкой наблюдения есть $|x - y|$ — модуль разности трехмерных векторов x и y . Согласно принципу суперпозиции, вклады всех элементов среды нужно просуммировать, т. е. просто поставить спереди символ интегрирования. В итоге получаем искомое решение:

$$\varphi(x) = \int dy \frac{\rho(y)}{|x - y|} = \int \frac{dQ(y)}{|x - y|}. \quad (176)$$

Первая запись относится к случаю объемного распределения заряда с заданной объемной плотностью $\rho(y)$, а вторая — геометрически-ковариантная запись, пригодная для любого (объемного, поверхностного, линейного) распределения заряда при должном истолковании величины дифференциала заряда $dQ(y)$. Формула (176) пригодна и для системы точечных зарядов, если в качестве $\rho(y)$ использовать известное из (146) выражение с δ -функцией (тогда интегрирование по y в (176) снимается по правилу (145)).

Аналогичное (176) решение уравнения Пуассона (173) в магнитоэлектродинамике для векторного потенциала $\vec{A}$ в кулоновской калибровке $\text{div } \vec{A} = 0$ получается из (176) стандартной заменой (174):

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{c} \int dy \frac{\vec{j}(y)}{|x - y|} = \frac{1}{c} \int \frac{d\vec{J}(y)}{|x - y|}. \quad (177)$$

Второе выражение — геометрически-ковариантная запись, пригодная для любого распределения токов при правильном понимании входящего в него “дифференциала полного тока” $d\vec{J}$ (для контура оно приведено в (164)).

Есть еще один вопрос, который необходимо обсудить: поскольку стандартная замена (174) справедлива лишь для потенциала $\vec{A}$ в кулоновской

калибровке, а мы предъявляем полученный с помощью стандартной замены конкретный ответ (177), для внутренней самосогласованности рассуждений необходимо доказать, что выражение (177) удовлетворяет кулоновскому калибровочному условию $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Это действительно так. Для доказательства перейдем мысленно в (177) от векторной записи с символом “ $\rightarrow$ ” к “значковой записи” с индексом i у $\vec{A}$ и $\vec{j}$. Тогда $\operatorname{div} \vec{A}$ получается действием операции $\partial/\partial x_i$ на левую часть (177). Операция $\partial/\partial x_i$ проносится под знак интеграла по y и действует только на множитель $1/|x - y|$ в подынтегральном выражении. Поскольку этот множитель зависит лишь от разности $x - y$, действующую на него операцию $\partial/\partial x_i$ можно заменить на $-\partial/\partial y_i$. Выполнив затем интегрирование по частям, “перебросим” производную $\partial/\partial y_i$ на множитель $j_i(y)$, что даст $\operatorname{div} \vec{j}(y) = 0$ в силу статического уравнения непрерывности (169).

Таким образом, мы доказали, что получаемый из (177) векторный потенциал $\vec{A}$ автоматически удовлетворяет условию кулоновской калибровки $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, — это следствие уравнения непрерывности (169).

3.3 Мультипольное разложение скалярного потенциала φ в электростатике. Мультипольные моменты и их свойства

Постановка задачи и общий принцип построения мультипольного разложения. Для простоты будем говорить о “локализованной” (т. е. сосредоточенной внутри некоторой ограниченной области пространства V) системе зарядов с объемным распределением, которое задается соответствующей плотностью заряда $\rho(x)$. Начало координат системы отсчета поместим где-нибудь внутри данной области V , а “размером системы” будем называть величину $\max|y| \equiv L_{\text{сист.}}$, где y — произвольная точка, пробегающая область размещения зарядов.

Мы хотим найти потенциал $\varphi(x)$ (176) вне системы зарядов, т. е. в области $r \equiv |x| > L_{\text{сист.}}$. Хорошо известно (и интуитивно очевидно), что на очень больших расстояниях систему можно воспринимать как точечный суммарный заряд Q , создающий потенциал $\varphi = Q/r$. Мультипольное разложение — представление точного ответа (176) в виде ряда, содержа-

щего все поправки к простейшему приближению Q/r . Параметром малости в этом разложении является величина $L_{\text{сист.}}/r$ — отношение размера системы к расстоянию до точки наблюдения. Для получения искомого ответа нужно просто разложить входящую в (176) величину $1/|x - y|$ в ряд Тейлора по y .

Напомним основные формулы для таких рядов. Для одномерных переменных тейлоровское разложение $f(x + a)$ по a имеет вид

$$f(x + a) = f(x) + a \frac{d}{dx} f(x) + \frac{1}{2!} a^2 \left(\frac{d}{dx} \right)^2 f(x) + \dots$$

Отметим (только из эстетических соображений), что правую часть этого равенства можно формально представить в виде $\exp(ad/dx) \cdot f(x)$, — разложение экспоненты в ряд дает искомый ответ.

Пусть теперь x, a — трехмерные векторы. Обобщением приведенной выше формулы является следующее соотношение:

$$\begin{aligned} f(x + a) &= f(x) + a_i \partial_i f(x) + \frac{1}{2!} a_i a_k \partial_i \partial_k f(x) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_{i_1} \dots a_{i_n} \cdot \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x), \end{aligned} \quad (178)$$

в котором $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ и для всех повторяющихся латинских индексов, как обычно, подразумевается суммирование по их возможным значениям 1, 2, 3. Отметим, что ряд (178) также формально собирается в экспоненту:

$$f(x + a) = \exp[a_i \partial_i] f(x).$$

Разложим по правилу (178) входящую в интеграл (176) функцию $1/|x - y|$ в ряд Тейлора по y (сразу отметим, что этот ряд сходится при $|y| < |x| \equiv r$):

$$1/|x - y| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} y_{i_1} \dots y_{i_n} \cdot \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{r}, \quad (179)$$

где $r \equiv |x|$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$. Подставим это разложение в (176) и вынесем не зависящие от переменной интегрирования y величины за знак интеграла:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} T_{i_1 \dots i_n} \cdot \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{r}, \quad (180)$$

$$T_{i_1 \dots i_n} = \int dy \rho(y) y_{i_1} \dots y_{i_n}. \quad (181)$$

Соотношение (180) есть искомое мультипольное разложение потенциала φ , а величины (181) называются мультипольными моментами системы. Перечислим первые из них:

$$\begin{aligned}\int dy \rho(y) &\equiv Q && \text{— полный заряд системы,} \\ \int dy \rho(y) y_i &\equiv d_i && \text{— ее дипольный момент,} \\ \int dy \rho(y) y_i y_k &\equiv T_{ik} && \text{— ее квадрупольный момент,}\end{aligned}\tag{182}$$

следующим будет “октупольный момент” и так далее (общий принцип — название числа 2^n на греческом языке).

Свойства мультипольных моментов. Это:

1. *Симметричность* относительно любых перестановок их индексов $i_1 \dots i_n$, что очевидно из определения (181).

2. *Все они — истинные тензоры на группе O_3 .* Это следует из того, что плотность заряда $\rho(y)$ — истинное скалярное поле с законом преобразования типа (33) (что показано в п. 2.3), а координаты y_i — истинный вектор с законом преобразования (21):

$$\rho'(y') = \rho(y), \quad y'_i = \omega_{ik} y_k.\tag{183}$$

Выполнив поворот осей системы координат, при котором $y \rightarrow y' = \omega y$, из определения моментов (181) получаем:

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \int dy' \rho'(y') y'_{i_1} \dots y'_{i_n}.\tag{184}$$

Учитывая здесь соотношения (183) и равенство $dy = dy'$ для дифференциала объема при поворотах осей, приходим к соотношению

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \int dy \rho(y) \omega_{i_1 k_1} y_{k_1} \cdot \dots \cdot \omega_{i_n k_n} y_{k_n} = \omega_{i_1 k_1} y_{k_1} \cdot \dots \cdot \omega_{i_n k_n} T_{k_1 \dots k_n},$$

что и есть тензорный закон преобразования (26), — это и требовалось доказать.

При пространственных отражениях (23) сохраняется закон преобразования (183) для ρ и инвариантность дифференциала объема $dy' = dy$, а для самих координат $y \rightarrow -y$. Поэтому в преобразованном выражении (184)

появляется множитель $(-1)^n$, откуда следует, что мультипольные моменты (181) — истинные тензоры согласно (30).

3. *Преобразование моментов T при сдвиге начала отсчета системы координат.* Такому сдвигу при сохранении ориентации осей соответствуют трансляции $y_i \rightarrow y'_i = y_i + a_i$ паших переменных интегрирования в (181) с некоторым фиксированным вектором a_i . Соотношение (184) и закон преобразования ρ в (183) не изменяются, как и равенство $dy' = dy$ для дифференциала объема. Отсюда следует, что

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \int dy \rho(y) (y_{i_1} + a_{i_1}) \cdot \dots \cdot (y_{i_n} + a_{i_n}). \quad (185)$$

Если раскрыть скобки в произведении n множителей типа $(y + a)$, получим 2^n слагаемых. Мы не будем приводить получаемое таким путем общее выражение, поскольку оно громоздкое и для дальнейшего несущественно. Важны лишь следующие два замечания: 1) одним из слагаемых является исходный тензор $T_{i_1 \dots i_n}$; 2) во всех других слагаемых с множителями “ a ” коэффициентами при них являются “младшие” (т. е. более низкого ранга) мультипольные моменты (181). Итого:

$$T'_{i_1 \dots i_n} = T_{i_1 \dots i_n} + \text{вклады с младшими } T. \quad (186)$$

Нетрудно проверить (предоставляем это читателю), что при фиксированном моменте T и произвольном параметре трансляции a вклады с “младшими T ” в (186) исчезают тогда и только тогда, когда все эти “младшие моменты” равны нулю.

Отсюда следует, что инвариантным по отношению к сдвигам начала отсчета системы координат является только “первый ненулевой момент”. Для пояснения приведем примеры: полный заряд Q инвариантен всегда, поскольку он “самый младший”. Дипольный момент d_i инвариантен только при $Q = 0$, квадрупольный момент — только при равенстве нулю заряда и дипольного момента, и так далее.

Неприводимые мультипольные моменты. Мультипольное разложение потенциала φ в терминах неприводимых моментов. *Определение:* тензор называется неприводимым, если свертка по любой паре его индексов равна нулю. Неприводимость означает, что из данного тензора нельзя ностроить сворачиванием индексов более простой объект — тензор меньшего ранга. Ясно, что для сворачивания нужно иметь не менее двух индексов, скаляр и вектор считаются неприводимыми по определению.

Утверждение: из любого тензора T можно выделить его “неприводимую часть” $\bar{T}$ — неприводимый тензор того же ранга, который строится из T по правилу “ $\bar{T} = T +$ добавки с δ -символами”. Утверждается, что подходящим выбором таких добавок можно обеспечить неприводимость $\bar{T}$ и что эта величина определяется однозначно.

Мы не будем доказывать это утверждение в общем виде (с практической точки зрения достаточно знать, что оно правильно) и ограничимся конкретными примерами тензоров ранга 2 и 3.

Простейший пример — тензор второго ранга T_{ik} , для которого единственным вариантом “добавки с δ -символом” является выражение $c\delta_{ik}$ с некоторым коэффициентом c . Утверждение состоит в том, что при подходящем выборе этого коэффициента тензор $\bar{T}_{ik} = T_{ik} + c\delta_{ik}$ будет неприводимым, т. е. $\bar{T}_{ii} = 0$. Это очевидно, так как при учете равенства $\delta_{ii} = 3$ мы можем просто предъявить ответ для искомого коэффициента: $c = -T_{ss}/3$. Таким образом, неприводимая часть любого тензора второго ранга T_{ik} определяется следующим соотношением:

$$\bar{T}_{ik} = T_{ik} - \delta_{ik}T_{ss}/3. \quad (187)$$

В частности, для T_{ik} из (182) получаем:

$$\bar{T}_{ik} = \int dy \rho(y) [y_i y_k - y^2 \delta_{ik}/3]. \quad (188)$$

Это определение *неприводимого тензора квадрупольного момента* для произвольной системы зарядов.

Рассмотрим теперь произвольный тензор третьего ранга T_{ikl} и процедуру построения его “неприводимой части” $\bar{T}_{ikl}$. Учитывая все возможные в данном случае “добавки с δ -символами”, имеем:

$$\bar{T}_{ikl} = T_{ikl} + A_i \delta_{kl} + B_k \delta_{il} + C_l \delta_{ik} \quad (189)$$

с неизвестными векторами A, B, C . Утверждается, что их можно выбрать так, чтобы выполнить все условия неприводимости для $\bar{T}_{ikl}$:

$$\bar{T}_{ikk} = 0, \quad \bar{T}_{kik} = 0, \quad \bar{T}_{kki} = 0, \quad (190)$$

и что этот выбор однозначен. Из (189) и (190) мы получаем систему линейных неоднородных уравнений для определения неизвестных векторов A, B, C в (189). Мы не будем приводить решения, а ограничимся простым

замечанием, что выполнено основное условие разрешимости: число уравнений совпадает с числом неизвестных (в (190) три векторных уравнения, а в (189) — три неизвестных вектора A, B, C). Предоставляем читателю, при желании, убедиться самостоятельно, что для данной системы линейных уравнений определитель отличен от нуля, так что решение существует и единственно.

Полагаем, что этих примеров достаточно для пояснения смысла сформулированного выше утверждения и идеи его доказательства. Добавим только, что в общем случае нужно учитывать любые добавки с δ -символами, в частности, слагаемые не только с одним, но и с двумя множителями δ для тензора четвертого ранга.

Вернемся теперь к мультипольному разложению (180). *Утверждение:* ответ (180) для $\varphi(x)$ не изменится, если заменить в нем все мультипольные моменты T их неприводимыми частями $\bar{T}$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим сначала вклад в (180) квадрупольного момента $\propto T_{ik}\partial_i\partial_k(1/r)$. Величины T_{ik} и $\bar{T}_{ik}$ различаются лишь кратным δ_{ik} слагаемым, которое дает в ответ вклад $\propto \delta_{ik}\partial_i\partial_k(1/r) = \Delta(1/r) = 0$ при $r \neq 0$, где $\Delta = \partial_i\partial_i$ — оператор Лапласа. Поясним: функция $1/r$ — потенциал φ единичного точечного заряда, расположенного в начале координат, удовлетворяющий уравнению (175) $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ с плотностью заряда $\rho(x) = \delta(x)$ согласно (146) (координаты x трехмерные). Поэтому при $r = |x| \neq 0$ (это заведомо выполнено для интересующей нас области вне зарядов) имеем $\Delta(1/r) = 0$, что и доказывает утверждение: слагаемое с δ -символом в T_{ik} не дает вклада в конечный ответ (180).

Ясно, что это верно для любого вклада с δ -символом в любом мультипольном моменте: при сворачивании по индексам этого δ -символа с двумя соответствующими множителями ∂ в (180) получаем оператор Лапласа $\Delta = \partial_i\partial_i$, который пронесется через прочие символы ∂ и действует на $1/r$, поэтому вне системы зарядов ($r \neq 0$) данный вклад равен нулю. Это доказывает возможность замены $T \rightarrow \bar{T}$ в (180), поскольку T и $\bar{T}$, по определению, различаются только слагаемыми с δ -символами (см. выше).

Выполнив в (180) такую замену, получаем:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \bar{T}_{i_1 \dots i_n} \cdot \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (191)$$

Рассмотрим теперь входящую сюда величину $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n}(1/r)$ с $r = |x|$ и $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Приведем сначала в качестве справочной формулы следующее соотношение для производной модуля вектора $r \equiv |x|$:

$$\partial_i r = x_i/r \equiv n_i, \quad (192)$$

где n_i — единичный вектор направления x . Соотношение (192) легко получается дифференцированием по x_i величины $r \equiv |x| = (x_k x_k)^{1/2}$.

Используя (192), для первых величин $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n}(1/r)$ получаем:

$$\begin{aligned} \partial_i(1/r) &= -(1/r^2)\partial_i r = -n_i/r^2 = -x_i/r^3, \\ \partial_i \partial_k(1/r) &= \partial_k[-x_i/r^3] = -\delta_{ik}/r^3 + (-1)(-3)x_i x_k/r^5, \end{aligned} \quad (193)$$

и так далее. Ясно, что для многократных производных мы получим некоторое сложное выражение, содержащее множители x и символы δ с различными индексами. Основным для дальнейшего является следующее *утверждение*: при подстановке в (191) все слагаемые с δ -символами в производных $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n}(1/r)$ не дают вклада, поскольку свертка любого δ -символа с тензором $\bar{T}$ равна нулю в силу свойства неприводимости $\bar{T}$.

Таким образом, нам нужны лишь вклады без δ -символов в производных $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n}(1/r)$. Их вид нетрудно угадать (и затем обосновать "по индукции"), обобщив процедуру вычисления величин (193):

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n}(1/r) = (-1)^n (2n-1)!! x_{i_1} \dots x_{i_n} / r^{2n+1} + \dots, \quad (194)$$

где многоточие — несущественные вклады с δ -символами (напомним, что знак $!!$ обозначает "двойной факториал" — произведение всех нечетных чисел от единицы до указанного, для $n=0$ считаем $(2n-1)!! = 1$).

Подстановка (194) в (191) дает:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \bar{T}_{i_1 \dots i_n} \cdot x_{i_1} \dots x_{i_n} \cdot \frac{1}{r^{2n+1}} = \\ &= Q/r + d_i x_i / r^3 + 3\bar{T}_{ik} x_i x_k / 2r^5 + \dots \end{aligned} \quad (195)$$

Мы привели общее выражение и первые члены ряда, в которых Q — полный заряд системы, d_i — ее дипольный момент, $\bar{T}_{ik}$ — неприводимый квадрупольный момент (188).

Первый член разложения (195) — вклад заряда Q — убывает при $r \rightarrow \infty$ как $1/r$, следующий член — вклад дипольного момента — как $1/r^2$ (нужно

учитывать, что $x_i \propto r$), квадрупольного — как $1/r^3$, и так далее. Общее правило — “лишний множитель $1/r$ для каждого следующего вклада”.

Если известен потенциал φ , разлагающийся в ряд по $1/r$, то из отождествления этого ряда с разложением (195) можно однозначно найти все неприводимые мультипольные моменты $\bar{T}$, и наоборот, — по известным моментам $\bar{T}$ из (195) находится потенциал φ . Другими словами, между потенциалом φ и набором всех неприводимых моментов $\bar{T}$ имеется взаимнооднозначное соответствие. Отметим, что для исходных моментов (181) это не так: потенциал (180) по ним определяется однозначно, но обратное неверно.

Из сказанного следует, что если потенциал φ убывает при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/r$, то несколько первых неприводимых мультипольных моментов (их число зависит от скорости убывания φ) должны быть равными нулю. Пример: если сказано, что $\varphi \propto 1/r^3$, то отсюда следует, что полный заряд системы и ее дипольный момент равны нулю, а квадрупольный момент отличен от нуля. Комбинируя это замечание с предшествующей информацией, можно предложить, например, такую задачу: дано, что $\varphi \propto 1/r^3$, вопрос — зависит ли квадрупольный момент системы от выбора начала отсчета? Ответ — “не зависит”, поскольку в данном случае он есть “первый ненулевой” (см. выше).

Оценка области сходимости мультипольного разложения и сравнительной величины его вкладов. Мультипольное разложение (180) получается подстановкой ряда (179) в (176) и последующим почленным интегрированием. Ряд (179) сходится при $|y| < |x| \equiv r$, откуда следует, что его почленное интегрирование законно лишь в области $\max|y| \equiv L_{\text{свст}} < |x| \equiv r$, где $\max$ берется по всем точкам y из области размещения зарядов V . Геометрически условие $r > L_{\text{свст}}$ означает, что ряд сходится вне минимальной сферы с центром в начале координат, целиком содержащей область размещения зарядов V . Ясно, что вид этой сферы зависит от выбора точки начала отсчета системы координат внутри области V . Если распределение заряда сферически симметрично, естественно поместить начало координат в центре системы, и тогда мультипольное разложение будет сходиться всюду вплоть до границы такой области V . Но при отсутствии сферической симметрии область сходимости $r > L_{\text{свст}}$ никогда не будет совпадать с границами области размещения зарядов V , так что конкретный выбор точки начала отсчета координат внутри V практического значения не имеет.

Обсудим теперь вопрос о скорости сходимости мультипольного разложения. Параметром малости в (179) является отношение $|y|/|x| = |y|/r$. При подстановке в (176) и интегрировании по y эту оценку нужно заменить на $L_{\text{сист}}/r$, — это и есть реальный параметр малости мультипольного разложения. Для пояснения приведем в качестве примера следующую задачу: пусть известно, что заряды находятся внутри одного кубометра, а нас интересует потенциал φ на расстоянии 100 метров от этой системы и мы хотим найти этот потенциал с точностью до 1/100 процента, т. е. с относительной точностью 10^{-4} . Вопрос: сколько членов мультипольного разложения нужно учитывать? Ответ: по условиям задачи параметром малости мультипольного разложения является отношение размера системы “1 метр” к расстоянию “100 метров”, т. е. 10^{-2} . Это значит, что в мультипольном разложении каждый следующий член приблизительно в 100 раз меньше предыдущего. Следовательно, первая поправка к ведущему вкладу (и это не обязательно вклад заряда, а любой “первый ненулевой”) есть 1/100 от него, вторая поправка имеет относительный порядок малости 10^{-4} . Эти поправки, согласно заказанной точности, еще нужны, а следующей поправкой порядка 10^{-6} уже заведомо можно пренебречь. Итого, ответ на поставленный вопрос такой: нужен лишь первый отличный от нуля член мультипольного разложения и две поправки к нему, третья поправка уже не нужна.

В заключение приведем формулу для потенциала, создаваемого “бесконечно малым диполем” с заданным дипольным моментом $\vec{d}$. Называя систему “динолем”, мы имеем в виду, что ее полный заряд Q равен нулю, так что главным в разложении (195) является вклад дипольного момента. Он равен, согласно (195), $d_i x_i / r^3$, а уточнение “бесконечно малый” означает, что параметр разложения — отношение размера системы к расстоянию до точки наблюдения — в данном случае равен нулю, т. е. никаких поправок к динольному вкладу (195) не требуется. Итого, точный ответ для потенциала бесконечно малого диполя имеет следующий вид:

$$\varphi = (\vec{d}\vec{r})/r^3, \quad (196)$$

где $\vec{d}$ — дипольный момент системы, $\vec{r}$ — вектор от диполя в точку наблюдения, $r \equiv |\vec{r}|$. Этой формулой мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Неприводимые мультипольные моменты для системы зарядов со сферической или осевой симметрией. Сферической называется симметрия по отношению к любым поворотам ω , а осевой — симметрия по отношению к поворотам вокруг некоторой выделенной оси, в качестве которой всегда будем выбирать ось “3”. Симметрия для любого преобразования $y \rightarrow y' = \omega y$ выражается равенством $\rho(y') = \rho(y)$.

Утверждение: если плотность заряда ρ инвариантна относительно некоторого поворота ω , то все мультипольные моменты T (181) и их неприводимые части $\bar{T}$ также инвариантны, т. е. не изменяются при данном преобразовании: $T' = T$ и $\bar{T}' = \bar{T}$.

Доказательство: при любом повороте ω плотность заряда преобразуется по правилу (183) $\rho'(y') = \rho(y)$, что при учете условия симметрии $\rho(y') = \rho(y)$ приводит к равенству $\rho'(y') = \rho(y')$. При его подстановке в (184) получим выражение, отличающееся от (181) только обозначением переменной интегрирования $y \rightarrow y'$, следовательно, $T' = T$, что и требовалось доказать. Таким образом, инвариантность ρ относительно некоторого поворота ω влечет аналогичную инвариантность всех моментов (181), т. е. преобразованные по правилу (26) моменты совпадают с исходными. Поскольку их неприводимые части $\bar{T}$ определяются по T однозначно, ясно, что и для них справедливо сформулированное выше утверждение.

Рассмотрим теперь конкретные случаи:

1. *Сферическая симметрия.* В этом случае плотность заряда ρ и, как следствие, все мультипольные моменты системы считаются инвариантными по отношению к любым поворотам ω . Полный заряд $Q = \int dy \rho(y)$ инвариантен всегда, поэтому симметрия ρ не накладывает на него никаких ограничений. Для следующих моментов уже не так: например, дипольный момент d_i — вектор, который при сферической симметрии должен быть инвариантным, следовательно, равным нулю. Это верно и для всех старших неприводимых мультипольных моментов, что очевидно из доказанного в п. 1.3 утверждения: для любого сферически симметричного распределения зарядов потенциал вне системы есть Q/r , т. е. совпадает с первым членом разложения (195). Отсутствие поправок означает, что все следующие неприводимые мультипольные моменты равны нулю.

Резюме: при сферической симметрии все неприводимые мультипольные моменты, кроме заряда, равны нулю.

Замечание: во всех этих рассуждениях очень важно слово “неприводимость”. Например, для квадрупольного момента (182) из сферической симметрии ρ следует только то, что $T_{ik} \propto \delta_{ik}$. Но из добавочного требо-

вания неприводимости вытекает, что коэффициент при δ_{ik} должен быть равен нулю, т. е. неприводимый квадрупольный момент равен нулю.

2. *Осевая симметрия.* Будем считать, что ось "3" направлена по оси симметрии, так что вращения вокруг оси "3" эквивалентны двумерным вращениям в ортогональной плоскости "1, 2". Согласно приведенному выше утверждению, все моменты должны быть инвариантными относительно таких вращений. На полный заряд системы Q это не накладывает никаких ограничений, а для вектора дипольного момента из нашей симметрии следует, что он обязательно должен быть направлен вдоль оси симметрии "3". Из любопытства можно поставить следующий вопрос: что есть то минимальное дополнительное требование симметрии, которое гарантирует равенство нулю дипольного момента? Ответ очевиден: это требование симметрии "верх-низ" по оси "3". Пример: если распределение заряда — эллипсоид, то дипольный момент равен нулю, а если оно подобно "группе" без симметрии "верх-низ", то он может быть отличным от нуля.

Рассмотрим теперь квадрупольный момент для системы с осевой симметрией. Итак, пусть "3" — ось симметрии, "1, 2" — ортогональная плоскость, принимающие значения 1, 2 индексы будем обозначать буквами a, b . Повторяя дословно рассуждение, приведенное в начале п. 2.6, легко показать, что по отношению к группе вращений в двумерной плоскости "1, 2" индексы a, b являются векторными, а индекс "3" — скалярным. Это значит, что при таких двумерных вращениях величина T_{33} — скаляр, величины $T_{a3} = T_{3a}$ — вектор (учитываем симметрию T), а T_{ab} — тензор второго ранга. Из сказанного выше следует, что все эти величины должны быть инвариантными относительно вращений в плоскости "1, 2". На скаляр T_{33} это не накладывает никаких ограничений, а вектор $T_{a3} = T_{3a}$ должен быть равным нулю.

Рассмотрим теперь тензор T_{ab} — это матрица 2×2 . Тензорный закон преобразования $T'_{ab} = \omega_{ac}\omega_{bd}T_{cd}$ в матричной записи принимает вид $T' = \omega T \omega^T$, поэтому требование инвариантности $T' = T$ при учете свойства ортогональности $\omega^T = \omega^{-1}$ матриц поворота ω эквивалентно требованию коммутативности матриц T и ω . Если бы речь шла о трехмерных вращениях, то из коммутативности матрицы T_{ik} со всеми поворотами ω следовало бы, что $T_{ik} \propto \delta_{ik}$. Для двумерных вращений это уже не так: как известно, поворот в плоскости "1, 2" задается 2×2 матрицей $\omega(\theta)$ с элементами $\omega_{11} = \omega_{22} = \cos \theta$, $\omega_{12} = -\omega_{21} = \sin \theta$, где θ — угол поворота. Ясно, что $\omega(\theta)$ есть линейная комбинация единичной матрицы с элементами δ_{ab} и антисимметричной матрицы e с элементами $e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$.

Отсюда следует, что со всеми поворотами $\omega(\theta)$ коммутирует не только единичная матрица (как для трехмерных вращений), но и матрица e , так что из двумерной симметрии любого тензора T следует, что он является некоторой линейной комбинацией этих двух матриц.

Но у нас есть добавочное требование симметричности T , которое запрещает вклад в T антисимметричной матрицы e . Поэтому конечный вывод будет точно таким же, как и для трехмерных вращений: симметричный по индексам и инвариантный относительно поворотов тензор T_{ab} кратен δ_{ab} .

Таким образом, мы получаем, что при разбиении тензора T_{ik} на “ковариантные” по отношениям к двумерным вращениям блоки скаляр T_{33} может быть произвольным, вектор $T_{a3} = T_{3a}$ равен нулю, а тензор T_{ab} кратен δ_{ab} с двумерными индексами a, b . Это значит, что отличны от нуля лишь элементы T_{33} и $T_{11} = T_{22}$. Если добавить к этому еще и требование неприводимости, получаем связь $T_{11} + T_{22} + T_{33} = 0$. Отсюда следует, что вид матрицы T_{ik} определяется однозначно с точностью до множителя:

$$T = a \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (197)$$

где a — коэффициент, равный $T_{33}/2$. Выражение (197) — окончательный ответ для неприводимого тензора квадрупольного момента (188) любой системы с осевой симметрией.

3.4 Мультипольное разложение векторного потенциала $\vec{A}$ в магнитостатике. Магнитный момент произвольной системы токов

Постановка задачи точно такая же, как в электростатике: пусть есть локализованное внутри некоторой конечной области V распределение токов с объемной плотностью $\vec{j}$ и нас интересует потенциал вдали от системы. Будем исходить из выражения (177) для векторного потенциала в кулоновской калибровке и подставим в него разложение (179). В отличие от электростатики, мы не будем рассматривать весь ряд, а ограничимся вкладами

двух первых членов разложения (179):

$$1/|x - y| = 1/r - y_i \partial_i (1/r) + \dots = 1/r + (y_i x_i)/r^3 + \dots, \quad (198)$$

где $r \equiv |x|$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, а многоточие обозначает поправки, которые мы не будем учитывать. Подставив (198) в интеграл (177) и перейдя к индексным обозначениям, получим:

$$\vec{A}_s(x) = (1/cr) \int dy \vec{j}_s(y) + (x_p/cr^3) \int dy \vec{j}_s(y) y_p + \dots \quad (199)$$

По соглашению, мы не ставим знак “ $\rightarrow$ ” над x и y , хотя это тоже трехмерные векторы.

Для вычисления входящих в (199) интегралов выведем сначала несколько вспомогательных соотношений, вытекающих из статического уравнения непрерывности $\text{div } \vec{j} = 0$ (169). Для согласования с записью (199) переменную интегрирования будем обозначать через y , а символ ∂_i понимать как $\partial/\partial y_i$. Аргумент “ y ” у функций будем, как правило, опускать, поскольку он один и перепутать его не с чем.

Переходя к вычислениям, из равенства $\text{div } \vec{j} = 0$ (169) для произвольной функции $F = F(y)$ с помощью интегрирования по частям получаем следующее соотношение:

$$0 = \int dy F \text{div } \vec{j} = \int dy F \partial_i \vec{j}_i = - \int dy \vec{j}_i \partial_i F \quad (200)$$

(поскольку распределение источников считается локализованным, внеинтегральные члены отсутствуют, что в дальнейшем всегда подразумевается). Подставив в (200) в качестве F функцию $F(y) = y_s$, получаем:

$$0 = \int dy \vec{j}_i \partial_i y_s = \int dy \vec{j}_i \delta_{is} = \int dy \vec{j}_s, \quad (201)$$

откуда следует, что первый член в мультипольном разложении (199) равен нулю. Это значит, что “нет магнитных зарядов” — аналогичный электрическому заряду Q “нольный магнитный заряд” (201) всегда равен нулю в силу статического уравнения непрерывности $\text{div } \vec{j} = 0$.

Подставив теперь в соотношение (200) $F = y_s y_p$, получим следующее соотношение:

$$0 = \int dy \vec{j}_i \partial_i (y_s y_p) = \int dy \vec{j}_i (\delta_{is} y_p + \delta_{ip} y_s) = \int dy (\vec{j}_s y_p + \vec{j}_p y_s). \quad (202)$$

Оно позволяет выразить интеграл от произведения $y_i \vec{j}_k$ через его антисимметричную по индексам часть:

$$\int dy y_i \vec{j}_k = \int dy \{ [y_i \vec{j}_k + y_k \vec{j}_i] / 2 + [y_i \vec{j}_k - y_k \vec{j}_i] / 2 \},$$

откуда с учетом (202) следует, что

$$\int dy y_i \vec{j}_k = \int dy [y_i \vec{j}_k - y_k \vec{j}_i] / 2. \quad (203)$$

Правая часть этого равенства выражается через величину, которую называют “магнитным моментом” системы. Более точный термин — “магнитный дипольный момент”, но прилагательное “дипольный” обычно опускается.

Определение магнитного момента и его свойства. Магнитным моментом произвольной системы токов называется величина

$$\vec{m} = (1/2c) \int dy [\vec{y} \times \vec{j}(y)] = (1/2c) \int [\vec{y} \times d\vec{J}(y)]. \quad (204)$$

Второй вариант — геометрически-ковариантная запись, пригодная для любого распределения токов. В частности, для контура согласно (164) получаем:

$$\vec{m} = (I/2c) \int [\vec{y} \times d\vec{y}], \quad (205)$$

где $I > 0$ — ток в контуре, с которым согласовано направление $d\vec{y}$. В записи (204), (205) мы снабдили знаком “ $\rightarrow$ ” и переменную y , так как в формулах с векторным произведением неестественно нести один множитель с таким знаком, а другой — без него.

Поскольку $\vec{y}$ и $\vec{j}$ в (204) — истинные векторы, магнитный момент $\vec{m}$ — псевдовектор. В силу равенства (201) он является “первым ненулевым”, следовательно, не зависит от выбора начала отсчета системы координат.

Вернемся теперь к соотношению (203). Из определения векторного произведения ясно, что $A_i B_k - A_k B_i = \varepsilon_{ikl} [A \times B]_l$. Поэтому из соотношения (203) и определения магнитного момента (204) получаем следующую полезную справочную формулу:

$$\int dy y_i \vec{j}_k = c \varepsilon_{ikl} \vec{m}_l, \quad (206)$$

в которой $\vec{m}$ — магнитный момент системы. Формула (206) будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

В мультипольном разложении (199) первый член, как показано выше, исчезает и главным становится следующий вклад. С помощью соотношения (206) его можно выразить через магнитный момент, что дает

$$\vec{A}_s(x) = x_p \varepsilon_{psl} \vec{m}_l / r^3 + \dots = [\vec{m} \times \vec{x}]_s / r^3 + \dots, \quad (207)$$

где многоточие — не учитываемые нами поправки. Отсюда получаем аналогичную (196) формулу для векторного потенциала бесконечно малого магнитного диполя:

$$\vec{A} = [\vec{m} \times \vec{r}] / r^3, \quad (208)$$

где $\vec{m}$ — магнитный момент диполя, $\vec{r}$ — вектор от диполя в точку наблюдения.

Магнитный момент плоского витка. Магнитный момент для любого замкнутого контура определяется соотношением (205). Допустим, что этот контур (= “виток”) плоский и что начало отсчета системы координат находится в плоскости витка внутри него. В этом случае вектор $[\vec{y} \times d\vec{y}]$ в (205) для любого малого участка контура всегда будет направлен перпендикулярно плоскости витка. Допустим также, что контур выпуклый, т. е. любой проведенный из начала координат луч пересекает его только один раз (потом мы снимем это ограничение). Тогда можно утверждать, что все вклады $[\vec{y} \times d\vec{y}]$ имеют одинаковое направление и для интеграла (205) применимо простое правило “модуль суммы равен сумме модулей”:

$$|\vec{m}| = (I/2c) \int |[\vec{y} \times d\vec{y}]|. \quad (209)$$

Величина $|[\vec{y} \times d\vec{y}]|$ имеет простой геометрический смысл, так как для векторного произведения $|[\vec{y} \times d\vec{y}]| = |\vec{y}| |d\vec{y}| \sin \theta$. У нас $\vec{y}$ — вектор, направленный из начала координат в произвольную точку на контуре, $d\vec{y}$ — направленный по касательной к контуру в точке y бесконечно малый элемент его длины, θ — угол между этими двумя векторами. Если провести лучи из начала координат в концы рассматриваемого малого участка $d\vec{y}$, получим показанный на рис. 3.1 малый треугольник. Величина $|d\vec{y}|$ — его основание, величина $|\vec{y}| \sin \theta$ — его высота, следовательно, величина $|[\vec{y} \times d\vec{y}]| = |\vec{y}| |d\vec{y}| \sin \theta$ — удвоенная площадь этого малого треугольника. Отсюда при суммировании по всем малым элементам контура заключаем, что интеграл в (209) есть удвоенное значение его площади, т. е. для плоского витка

$$|\vec{m}| = IS/c, \quad (210)$$

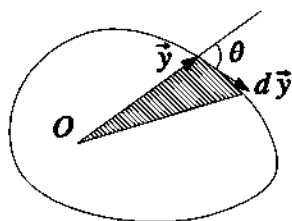


Рис. 3.1. Интеграл по выпуклому плоскому контуру в формуле (209) имеет простой геометрический смысл

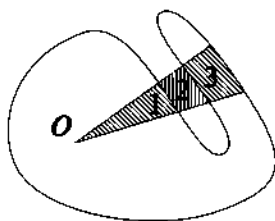


Рис. 3.2. К обобщению подхода для плоского невыпуклого контура

где I — ток в контуре, S — площадь витка. Вектор $\vec{m}$ ортогонален плоскости витка, а на вопрос “куда направлен — вверх или вниз?” объективного ответа не существует, поскольку $\vec{m}$ — псевдовектор, и его направление зависит от выбора системы координат (“левая или правая”). В “правой” системе направление тока в контуре и вектора $\vec{m}$ согласуются обычным “правилом штопора”.

Мы получили формулу (210) в предположении выпуклости контура, что гарантировало одинаковое направление (“верх или низ”) для вкладов всех его участков. Но ответ (210) верен для любого плоского витка, например, показанного на рис. 3.2. При отсутствии выпуклости луч, проведенный из начала координат, может пересекать контур несколько раз (это число всегда нечетное), в нашем примере (см. рис. 3.2) есть три пересечения. При каждом новом пересечении направление движения тока по отношению к направлению вектора $\vec{y}$ меняет знак. Обозначив через dS_i вклады в площадь треугольника от нумерованных цифрами 1, 2, 3 на рис. 3.2 областей, заключаем, что вклад от первого пересечения кратен dS_1 , от второго $-dS_1 - dS_2$ (минус из-за изменения направления тока), от третьего $dS_1 + dS_2 + dS_3$. Складывая, получаем $dS_1 + dS_3$, т. е. дифференциал площади самого витка. Тем самым показано, что ответ (210) верен для любого плоского витка независимо от его свойств выпуклости.

3.5 Силы и моменты сил, действующие на распределенные источники

Общие формулы. Вопрос ставится так: чему равна сила $d\vec{F}$ и создаваемый ей “крутящий момент” $d\vec{N}$, действующие на любой малый элемент среды с заданными плотностями заряда и тока ρ , $\vec{j}$ в заданном поле? Ответ нам фактически уже известен, поскольку речь идет о силе Лоренца, определяющейся соотношениями (162), (163), а “крутящий момент” — векторное произведение “плеча на силу”. Для удобства читателя воспроизведем здесь формулы (162), (163) для дифференциала силы $d\vec{F}(x)$, действующей на бесконечно малый объем среды d^3x ($\equiv dx$ по соглашению) вокруг точки x :

$$d\vec{F}(x) = dx\{\rho\vec{E} + [\vec{j} \times \vec{H}]/c\} = \vec{E}dQ + [d\vec{J} \times \vec{H}]/c. \quad (211)$$

Первая запись — для объемного распределения зарядов и токов, вторая — для любого при должной интерпретации величин dQ и $d\vec{J}$.

Момент силы $\vec{N}$ ($\equiv$ “крутящий момент”) определяется в механике как векторное произведение “плеча на силу”. Поэтому в нашем случае дифференциал момента $d\vec{N}$, действующего на малый элемент среды с объемом dx вокруг точки x есть

$$d\vec{N}(x) = [\vec{x} \times d\vec{F}(x)] \quad (212)$$

Полные силы и моменты, действующие на всю систему источников, получаются интегрированием величин (211), (212). Фактически формулы (211), (212) содержат полный ответ на все поставленные вопросы, все дальнейшее — их детализация и пояснения.

Отсутствие “самодействия” для полных сил и моментов. В общем случае действующее на элемент среды поле есть сумма двух вкладов: 1) поле, создаваемое самой системой и 2) некоторое заданное внешнее поле. Но для действующих на систему полных сил и моментов важен только второй вклад, что мы и называем “отсутствием самодействия”. Это означает, что суммарная сила и ее момент от собственного поля системы должны быть равными нулю. Это очевидно, так как в противном случае система могла бы “саморазгоняться” или “самораскручиваться” за счет действующих внутри нее сил, что противоречило бы законам сохранения импульса и момента импульса.

Из этих общих соображений мы уверены, конечно, в “отсутствии самодействия” для полных сил и моментов, но для конкретности желательно убедиться в этом непосредственно из формул (211), (212).

Мы рассмотрим только один самый простой пример в электростатике — действующую на систему зарядов полную силу $\vec{F}$, создаваемую ее собственным полем. Из соотношения (211) имеем: $\vec{F}_i = \int dx \rho(x) \vec{E}_i(x)$, где $\vec{E}_i(x) = -\partial_i \varphi(x)$ — напряженность электрического поля, создаваемого самой системой. Подставив сюда выражение (176) для потенциала, с учетом первого равенства (193) получаем:

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= \int dx \rho(x) (-\partial/\partial x_i) \int dy \rho(y)/|x-y| = \\ &= \int dx \int dy \rho(x) \rho(y) (x_i - y_i)/|x-y|^3 = 0,\end{aligned}$$

так как подынтегральное выражение нечетно относительно перестановки векторных аргументов x и y (это точный аналог утверждения о равенстве нулю “свертки симметричного с антисимметричным” для матриц).

Итак, мы доказали “отсутствие самодействия” для полной силы $\vec{F}$ в электростатике. Точно так же доказываются и все другие утверждения этого типа — равенство нулю создаваемого собственным полем полного крутящего момента $\vec{N}$ в электростатике и аналогичные утверждения для магнитостатики, проверку предоставляем читателю.

Мультипольные разложения для полных сил и моментов, действующих на систему в заданном внешнем поле. Будем считать, что система локализована, т. е. ее источники ρ , $\vec{j}$ сосредоточены в некоторой конечной области пространства V , и что она находится в некотором заданном внешнем поле. Нас будут интересовать лишь полные силы и моменты, действующие на всю систему. Выше было показано, что собственное поле системы в эти величины не дает вклада, т. е. существенно лишь считающееся заданным внешнее поле. Ответы для полных сил $\vec{F}$ и моментов $\vec{N}$ известны из соотношений (211), (212) (формулы приводим отдельно: первый вариант — электростатика, второй — магнитостатика):

$$\vec{F} = \int dx \rho(x) \vec{E}(x), \quad \vec{F} = c^{-1} \int dx [\vec{j}(x) \times \vec{H}(x)], \quad (213)$$

$$\vec{N} = \int dx \rho(x) [\vec{x} \times \vec{E}(x)], \quad \vec{N} = c^{-1} \int dx [\vec{x} [\vec{j}(x) \times \vec{H}(x)]]. \quad (214)$$

Мультипольные разложения для этих величин получаются при подстановке в них тейлоровских разложений по координатам вокруг любой точки внутри системы напряженностей внешних полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Это приводит к рядам, коэффициенты которых выражаются через обычные мульти-

польные моменты системы. Если номестить начало координат где-нибудь внутри области размещения зарядов V , то естественно использовать тейлоровское разложение по x в окрестности начала координат:

$$\vec{E}_i(x) = \vec{E}_i|_0 + x_k \partial_k \vec{E}_i|_0 + \dots, \quad \vec{H}_i(x) = \vec{H}_i|_0 + x_k \partial_k \vec{H}_i|_0 + \dots \quad (215)$$

Символом $|_0$ уточняется, что значения функций $\vec{E}$, $\vec{H}$ и их производных берутся в точке разложения $x = 0$ (начало координат). Подстановка (215) в формулы (213) и (214) приводит к искомым мультипольным разложениям для величин $\vec{F}$ и $\vec{N}$. Ясно, конечно, что такие разложения будут “хорошими” лишь тогда, когда внешние поля $\vec{E}$, $\vec{H}$ являются достаточно гладкими в области размещения источников, т. е. достаточно хорошо воспроизводятся начальными отрезками рядов (215) (для пояснения приведем пример “плохой функции” — нечто вроде $f(x) \propto \sin(kx)$, совершающей много колебаний в пределах области размещения источников).

Рассмотрим первые члены мультипольных разложений для $\vec{F}$. В электростатике из (213) и (215) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \int dx \rho(x) \left\{ \vec{E}_i|_0 + x_k \partial_k \vec{E}_i|_0 + \dots \right\} = \\ &= \vec{E}_i|_0 \int dx \rho(x) + \partial_k \vec{E}_i|_0 \int dx \rho(x) x_k + \dots = \\ &= Q \vec{E}_i|_0 + \vec{d}_k \partial_k \vec{E}_i|_0 + \dots, \end{aligned} \quad (216)$$

где Q — полный заряд системы, $\vec{d}$ — ее дипольный момент. Ясно, что при учете следующих членов в разложении (215) мы получили бы вклады квадрупольного и т. д. моментов.

Аналогично в магнитостатике имеем (для силы $\vec{F}$ в (213) переходим к индексным обозначениям):

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= c^{-1} \varepsilon_{ikl} \int dx \vec{j}_k(x) \vec{H}_l(x) = c^{-1} \varepsilon_{ikl} \int dx \vec{j}_k(x) \left\{ \vec{H}_l|_0 + x_s \partial_s \vec{H}_l|_0 + \dots \right\} = \\ &= c^{-1} \varepsilon_{ikl} \left\{ \vec{H}_l|_0 \int dx \vec{j}_k(x) + \partial_s \vec{H}_l|_0 \int dx x_s \vec{j}_k(x) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (217)$$

Входящие сюда интегралы известны из справочных формул (201), (206): первый из них равен нулю (“отсутствие магнитных зарядов”),

а второй выражается через магнитный момент системы $\vec{m}$. В итоге получаем:

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= c^{-1} \varepsilon_{ikl} \cdot c \varepsilon_{skp} \vec{m}_p \partial_s \vec{H}_l \Big|_0 + \dots = \\ &= (\delta_{is} \delta_{lp} - \delta_{ip} \delta_{ls}) \vec{m}_p \partial_s \vec{H}_l \Big|_0 + \dots = \vec{m}_l \partial_i \vec{H}_l \Big|_0 - \vec{m}_i \partial_l \vec{H}_l \Big|_0 + \dots\end{aligned}\quad (218)$$

Второе выражение в правой части равно нулю в силу уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, поэтому окончательно

$$\vec{F}_i = \vec{m}_k \partial_i \vec{H}_k \Big|_0 + \dots \quad (219)$$

Отсюда, в частности, следует, что для однородного магнитного поля $\vec{H} = \text{const}$ действующая на любую систему токов полная сила $\vec{F}$ равна нулю, — она может порождаться только неоднородностью поля. Влияние однородного поля на систему проявляется в “крутящем моменте” $\vec{N}$, явное выражение для которого нетрудно получить из соотношений (214) и (206):

$$\vec{N} = [\vec{m} \times \vec{H}]. \quad (220)$$

Предлагаем читателю вывести эту формулу в качестве упражнения. Отметим, что ответ (220) с точностью до множителя легко найти из общих соображений: нам известно, что $\vec{N}$, $\vec{m}$, $\vec{H}$ — псевдовекторы, и что ответ для $\vec{N}$ линеен по $\vec{m}$ и $\vec{H}$. Отсюда однозначно следует, что искомое выражение есть векторное произведение (220) с точностью до множителя.

В заключение приведем нужные для дальнейшего формулы для сил, действующих на бесконечно малый электрический или магнитный диполь в заданном внешнем поле. В электростатике называя систему “диполем” мы всегда имеем в виду, что ее полный заряд Q равен нулю, поэтому главным в любом мультипольном разложении становится дипольный вклад. В магнитостатике этого уточнения не требуется, поскольку вклад дипольного (магнитного) момента там всегда главный из-за отсутствия “магнитных зарядов” в силу соотношения (201). Термин “бесконечно малый” означает, что в мультипольных разложениях не нужно учитывать поправок, так что дипольные вклады можно понимать как точные ответы. В нашем случае рядов (216), (219) уточняющий символ $\Big|_0$ также становится ненужным, поскольку для бесконечно малого (= “точечного”) диполя под внешними полями и их производными в ответах всегда подразумеваются, естественно, значения этих величин в точке расположения диполя. И еще

одно замечание: дипольный вклад в (216) имеет вид $\vec{d}_k \partial_k \vec{E}_i$, но его можно переписать и в виде $\vec{d}_k \partial_i \vec{E}_k$ в силу равенства $\partial_k \vec{E}_i - \partial_i \vec{E}_k = 0$, вытекающего из уравнения Максвелла $\text{rot } \vec{E} = 0$ в электростатике.

Поэтому конечные ответы для силы $\vec{F}$, действующей со стороны внешнего поля на бесконечно малый диполь, мы будем записывать следующим образом:

$$\vec{F}_i = \vec{d}_k \partial_i \vec{E}_k \text{ (электр.)}, \quad \vec{F}_i = \vec{m}_k \partial_i \vec{H}_k \text{ (магнит.)}. \quad (221)$$

Они нам понадобятся в дальнейшем, когда мы будем обсуждать вопрос о силах, действующих на бесконечно малые элементы среды в диэлектриках и магнетиках.

3.6 Потенциальная энергия системы зарядов или токов в заданном внешнем поле

Общие соображения. Для любой системы потенциальной энергией U называют такую величину, приращение которой ΔU при изменении состояния системы равно требующейся для данного изменения работе внешних сил $\Delta A_{\text{в. с.}}$. Но это понятие можно ввести только тогда, когда работа $\Delta A_{\text{в. с.}}$ не зависит от “пути перемещения”. Поясним: если обозначить через A и B начальное и конечное состояния системы, то переход $A \rightarrow B$ можно осуществить, как правило, разными путями. Важно, чтобы для любого из них величина $\Delta A_{\text{в. с.}}$ была бы одной и той же, — только в этом случае величину $\Delta A_{\text{в. с.}}$ можно интерпретировать как не зависящее от пути приращение потенциальной энергии $\Delta U = U(B) - U(A)$.

Напомним этот общий принцип, вернемся к электродинамике. Под “системой” мы будем понимать любую локализованную систему зарядов или токов, находящуюся в заданном внешнем поле. Под “состоянием системы” будем понимать ее положение в пространстве, а под “изменением состояния” — пространственное смещение (трансляцию) системы “как целого” с сохранением ее ориентации в пространстве и внутренней конфигурации зарядов и токов.

Допустим, что система как целое смещается на некоторый бесконечно малый вектор $\vec{a}$, и будем выполнять все вычисления лишь с точностью до вкладов первого порядка по $\vec{a}$. Наша задача — найти нужную для такого смещения “работу внешних сил” $\Delta A_{\text{в. с.}}$. Это легко сделать с помощью

полученных в предыдущем разделе формул для полной силы $\vec{F}$, действующей на систему со стороны поля. Но здесь необходимо уточнение, поскольку нас интересует работа “внешней силы”, а не той, которая создается полем.

Поясним это на примере системы зарядов в поле $\vec{E}$. Оно действует на систему с известной из (213) силой $\vec{F} \equiv \vec{F}_{\text{поля}}$. Но нам нужна еще некоторая другая “внешняя сила”, по величине совпадающая с “силой поля”, но противоположная по направлению:

$$\vec{F}_{\text{вн}} = -\vec{F}_{\text{поля}}, \quad (222)$$

которая, действуя совместно с силой поля, удерживает систему в равновесии. Происхождение этой внешней силы значения не имеет. Например, для наглядности можно себе представить, что некий наблюдатель удерживает систему зарядов “руками”, не позволяя ей смещаться под действием силы поля. Затем он немного ослабляет воздействие, позволяя системе бесконечно медленно (т. е. квазистатически) сместиться на некоторое расстояние (вектор) $\vec{a}$. Условие квазистатичности означает, что мы можем пренебрегать всеми эффектами, связанными с понятием кинетической энергии, и что в процессе перемещения системы равенство (222) все время остается выполненным. Тогда механическая работа внешней силы $\Delta A_{\text{в. с.}}$ при смещении на вектор $\vec{a}$ вычисляется по стандартному правилу “сила на путь”:

$$\Delta A_{\text{в. с.}} = (\vec{a} \vec{F}_{\text{вн}}) = -(\vec{a} \vec{F}_{\text{поля}}) \quad (223)$$

с $\vec{F}_{\text{поля}} \equiv \vec{F}$ из (213). Руководствуясь этими общими соображениями, переходим теперь к конкретным вычислениям.

Электростатика: энергия системы зарядов в заданном внешнем поле. Итак, пусть есть некоторая локализованная система зарядов с заданной плотностью $\rho(x)$, находящаяся в заданном внешнем поле $\vec{E}(x)$. Мы смещаем систему как целое на некоторый бесконечно малый вектор $\vec{a}$ и хотим найти нужную для такого смещения работу внешних сил (223).

Из соотношения (223) и формулы (213) для $\vec{F}_{\text{поля}} \equiv \vec{F}$ получаем:

$$\Delta A_{\text{в. с.}} = -a_i \int dx \rho(x) \vec{E}_i(x) = \int dx \rho(x) a_i \partial_i \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — потенциал внешнего поля, $\vec{E}_i(x) = -\partial_i \varphi(x)$. Выполнив интегрирование по частям, имеем:

$$\Delta A_{\text{в. с.}} = - \int dx \varphi(x) a_i \partial_i \rho(x). \quad (224)$$

Входящую сюда величину $a_i \partial_i \rho(x)$ можно представить с нужной точностью (первый порядок по a) в виде разности “начальной плотности заряда для системы до сдвига” $\rho_{\text{нач}}(x) = \rho(x)$ и “конечной плотности заряда для системы после сдвига” $\rho_{\text{кон}}(x) = \rho(x - a)$:

$$\rho_{\text{нач}}(x) - \rho_{\text{кон}}(x) = \rho(x) - \rho(x - a) = a_i \partial_i \rho(x) + \dots,$$

где многоточием обозначены несущественные поправки высшего порядка по a . Подставив это выражение в (224), получаем:

$$\Delta A_{\text{в. с.}} = \int dx \varphi(x) [\rho_{\text{кон}}(x) - \rho_{\text{нач}}(x)] \equiv U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}} \quad (225)$$

с величиной

$$U = \int dx \rho(x) \varphi(x), \quad (226)$$

которую и следует считать потенциальной энергией системы зарядов в заданном внешнем поле. Отметим, что вид ответа (225) автоматически снимает вопрос о независимости работы внешних сил от пути перемещения: поскольку на каждом малом участке этого пути прирост энергии (225) есть разность “конечная минус начальная”, то это будет верно и для любого пути, составленного из таких малых участков. Отметим также, что для точечного заряда подстановка в (226) в качестве ρ выражения (146) с δ -функцией приводит к хорошо известной формуле $U = e\varphi$ с потенциалом φ в точке расположения заряда.

Магнитостатика: механическая потенциальная энергия системы токов в заданном внешнем поле. Постановка задачи здесь точно такая же, как и в электростатике: для некоторой локализованной системы токов рассматривается ее малое смещение как целого и вычисляется механическая работа внешней силы (223) с известной из (213) силой $\vec{F} \equiv \vec{F}_{\text{поля}}$. При вычислении нужно учитывать равенство $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ и уравнение непрерывности $\text{div } \vec{j} = 0$. В конечном итоге получим аналогичное (225) соотношение $\Delta A_{\text{в. с.}} = U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}}$ с величиной $U \equiv U^{\text{мех}}$:

$$U^{\text{мех}} = -c^{-1} \int dx (\vec{A} \vec{j}) = -c^{-1} \int (\vec{A} d\vec{J}), \quad (227)$$

которую будем называть “механической потенциальной энергией системы токов в заданном внешнем поле”. Вывод соотношения (227) осуществляется по той же схеме, как и в электростатике, и мы предоставляем его читателю в качестве упражнения.

Для замкнутого контура с учетом расшифровки величины $d\vec{J}$ в (164) выражение (227) принимает следующий вид:

$$U^{\text{мех}} = -c^{-1}I \int (\vec{A}d\vec{x}). \quad (228)$$

Входящий сюда интеграл есть циркуляция вектора $\vec{A}$ по контуру, которую можно превратить с помощью теоремы Стокса в поток вектора $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ через любую натянутую на контур поверхность (от ее выбора ответ не зависит). В итоге получаем:

$$U^{\text{мех}} = -c^{-1}I\Phi, \text{ где } \Phi = \iint H_n ds. \quad (229)$$

Здесь I — ток в контуре, Φ — магнитный поток через ограниченную им поверхность.

Магнитостатика: полная потенциальная энергия системы токов в заданном внешнем поле. Мы называем величину (227) “механической потенциальной энергией”, поскольку при ее вычислении учитывалась только механическая работа внешних сил (223). В электростатике ничего другого и не требуется, а в магнитостатике это не так. Дело в том, что во всех наших рассуждениях предполагается неизменность “внутренней конфигурации” зарядов и токов, — рассматриваются лишь смещения системы “как целого”. Теперь можно поставить вопрос: а не должны ли “внешние силы” тратить дополнительную работу на поддержание неизменности внутренней конфигурации источников? В электростатике ответ отрицательный: заряды можно представлять себе как бы “вмороженными” в некоторую непроводящую среду (ясно, что термин условный) и для поддержания их в таком состоянии никакой дополнительной работы не требуется — нужна лишь “жесткость среды”. В магнитостатике дело обстоит иначе. Для простоты рассмотрим некоторый контур в заданном поле. При перемещении контура меняется магнитный поток Φ сквозь него, что по закону электромагнитной индукции (7) приводит к возникновению в контуре “фарадеевской ЭДС” (ЭДС = “электродвижущая сила”), а она, в свою очередь, будет приводить к изменению тока I в контуре. Но мы хотим рассматривать задачу с “фиксированной внутренней конфигурацией источников”, в частности, с фиксированным током для контура.

Чтобы добиться этого, нужно допустить наличие некоторого внешнего воздействия, условно, “внешней силы”, которое противодействует фарадеевской ЭДС и не позволяет ей менять ток в контуре. Простейшая и

естественная модель такого противодействия — некоторая включенная в контур “внешняя ЭДС”, компенсирующая фарадеевскую:

$$\mathcal{E}^{\text{вн}} = -\mathcal{E}^{\text{Фар}} \quad (230)$$

(отметим аналогию с формулой (222)). Совершаемая этой внешней ЭДС работа “по поддержанию постоянным тока I в контуре” добавляется к чисто механической (сила на путь) работе (223) и должна включаться в полную работу внешних сил при определении понятия “полной потенциальной энергии системы токов”. Но и это еще не все: оказывается (и на первый взгляд это удивительно), что при нашей постановке задачи с некоторым фиксированным внешним полем на поддержание его “постоянства” тоже нужно затрачивать работу, включая ее, естественно, в полную работу внешних сил.

Разобраться в этой довольно сложной картине энергетики проще всего можно на примере двух взаимодействующих контуров 1, 2 с токами $I_{1,2}$ и с любой их геометрией (т. е. контуры не должны быть одинаковыми). Каждый из этих двух контуров создает “внешнее поле” для другого, так что если удерживать, например, контур 2 неподвижным и смещать контур 1, то мы остаемся в рамках задачи о перемещении системы (т. е. контура 1) в заданном внешнем поле (т. е. в поле контура 2).

По формуле (229) можно найти “механическую потенциальную энергию контура 1 в поле контура 2”: $U_{12}^{\text{мех}} = -c^{-1} I_1 \Phi_{12}$, где I_1 — ток в контуре 1, а Φ_{12} — магнитный поток сквозь него, создаваемый полем второго контура. Аналогично можно ввести величину $U_{21}^{\text{мех}} = -c^{-1} I_2 \Phi_{21}$ — механическую потенциальную энергию второго контура в поле первого. Из общих соображений типа третьего закона Ньютона ясно, что эти две величины должны быть равными и их поэтому можно называть “механической потенциальной энергией взаимодействия контуров”:

$$U_{12}^{\text{мех}} = -c^{-1} I_1 \Phi_{12} = -c^{-1} I_2 \Phi_{21} = U_{21}^{\text{мех}}. \quad (231)$$

Это нетрудно строго доказать с помощью соотношения (228) для одного из контуров, подставив в него получаемое из (177) выражение для векторного потенциала второго контура, проверку предоставляем читателю.

Вернемся теперь к нашей основной задаче — вычислению добавочной работы $\Delta A^{\text{под}}$, которую должны затрачивать “внешние силы” (т. е. “внешняя ЭДС”) на поддержание постоянным тока в каждом из контуров. Идея

вычисления проста: выражение для фарадеевской ЭДС известно из соотношения (7) (напомним, что ЭДС, по определению, есть входящая в (7) циркуляция вектора E), по нему находим “внешнюю ЭДС” из (230). Мощность работы любой ЭДС $\mathcal{E}$ — произведение $\mathcal{E}$ на ток в контуре I , сама работа за малый интервал времени δt — произведение мощности на δt .

Используя эти простые соображения, рассмотрим сначала работу $\Delta\mathcal{A}_1^{\text{под}}$, нужную для поддержания постоянства тока в первом контуре. Из закона электромагнитной индукции (7) с обозначением $\iint H_n ds \equiv \Phi$ для магнитного потока при учете соотношения (230) получаем: $\mathcal{E}_1^{\text{Фар}} = -c^{-1}\partial_t\Phi_{12} = -\mathcal{E}_1^{\text{вн}}$. Отсюда находим: $\Delta\mathcal{A}_1^{\text{под}} = \delta t I_1 \mathcal{E}_1^{\text{вн}} = c^{-1}I_1\delta t\partial_t\Phi_{12} = c^{-1}I_1\delta\Phi_{12}$ (использовано соотношение $\delta t\partial_t\Phi_{12} = \delta\Phi_{12}$ для приращения магнитного потока за малое время перемещения системы).

Итого, мы получили следующее выражение для работы внешних сил, необходимой для поддержания постоянства тока в первом контуре:

$$\Delta\mathcal{A}_1^{\text{под}} = c^{-1}I_1\delta\Phi_{12}. \quad (232)$$

Рассуждая точно так же, для работы на поддержание постоянным тока во втором контуре мы получили бы ответ $\Delta\mathcal{A}_2^{\text{под}} = c^{-1}I_2\delta\Phi_{21}$, который в силу равенства (231) совпадает по величине с (232): $\Delta\mathcal{A}_2^{\text{под}} = \Delta\mathcal{A}_1^{\text{под}}$, т. е. работа “на поддержание токов” в двух контурах одинакова.

Выражение (232) отличается лишь знаком от вариации при постоянных токах величины (231). Поскольку эта вариация имеет смысл механической работы внешних сил, заключаем, что

$$\Delta\mathcal{A}_1^{\text{под}} = \Delta\mathcal{A}_2^{\text{под}} = -\Delta\mathcal{A}^{\text{мех}}. \quad (233)$$

Тогда полная работа внешних сил $\Delta\mathcal{A}^{\text{полн}} = \Delta\mathcal{A}^{\text{мех}} + \Delta\mathcal{A}_1^{\text{под}} + \Delta\mathcal{A}_2^{\text{под}}$ отличается от механической лишь знаком: $\Delta\mathcal{A}^{\text{полн}} = -\Delta\mathcal{A}^{\text{мех}}$. Если ввести “полную потенциальную энергию взаимодействия контуров” $U_{12}^{\text{полн}}$, приращение которой равно полной работе внешних сил, то из сказанного выше вытекает простое соотношение:

$$U_{12}^{\text{полн}} = -U_{12}^{\text{мех}}. \quad (234)$$

Мы получили эту формулу для конкретного случая двух взаимодействующих контуров с током. Но ее простота и логическая прозрачность вывода позволяют легко обобщить ее на случай произвольной системы токов в произвольном заданном внешнем поле: полная потенциальная энергия

системы токов отличается от механической потенциальной энергии (227) только знаком, т. е.

$$U_{\text{полн}} = -U_{\text{мех}} = c^{-1} \int dx (\vec{A} \vec{j}) = c^{-1} \int (\vec{A} d\vec{J}). \quad (235)$$

Зная этот ответ и идеологию его вывода, читатель может попробовать получить общую формулу (235) самостоятельно без обращения к простой модели двух взаимодействующих контуров.

Заключительные замечания:

1. В рассмотренной выше конкретной задаче один из контуров рассматривался как “система токов”, а второй — как источник действующего на эту систему внешнего поля. Обобщая первое равенство (233), можно сказать, что работа внешних сил, необходимая для поддержания постоянства внутренней конфигурации системы токов, совпадает по величине с работой, необходимой для поддержания постоянства внешнего поля.

2. Сейчас мы обсуждаем магнитостатику, к ней и относится окончательная формула (235). Но в процессе ее вывода нам пришлось использовать на промежуточных этапах динамический закон индукции Фарадея с производной по времени $\partial_t \Phi$ магнитного потока Φ . Это неизбежно, поскольку именно в эффекте электромагнитной индукции содержится суть дела. В конечном ответе мы избавляемся от $\partial_t \Phi$ с помощью соотношения $\delta t \partial_t \Phi = \delta \Phi$, что позволяет вернуться к чисто статической терминологии. Такая же логика будет использоваться впоследствии при обсуждении термодинамики магнетиков. Там же будет приведено и обоснование соотношения (235) без использования модели двух взаимодействующих контуров.

3. Мультипольное разложение для величин (226), (235) строится точно так же, как и для рассмотренных в предыдущем разделе полных сил и моментов, т. е. подстановкой в ответы тейлоровских разложений по координатам для внешних полей. По дипольным вкладам в таких разложениях можно найти выражения для потенциальной энергии бесконечно малого диполя в заданном внешнем поле.

3.7 Собственная потенциальная энергия системы зарядов или токов (энергия в собственном поле)

В предыдущем разделе мы определили понятие потенциальной энергии системы зарядов или токов в заданном внешнем поле. Теперь мы хотим ввести понятие “собственной потенциальной энергии”, т. е. энергии системы в создаваемом ею собственном поле (внешнее считаем отсутствующим).

Идея определения данного понятия проста: разбиваем мысленно систему зарядов или токов на малые “кусочки” = “элементы” и определяем собственную энергию системы как сумму энергий взаимодействия всех ее частей в пределе “бесконечно малого дробления”. В логическом отношении важно, что понятие “энергия одного элемента в поле другого” уже определено, так как поле “другого элемента” можно понимать как внешнее для первого элемента. Наша задача — доказать существование такого предела и его независимость от “способа дробления” при разумных предположениях о поведении источников и, разумеется, предъяснить явные ответы. Под “энергией системы во внешнем поле” в электростатике понимается выражение (226), а в магнитостатике — полная потенциальная энергия (235).

Электростатика. Итак, пусть есть некоторая локализованная система зарядов с заданной плотностью $\rho(x)$. Создаваемое системой собственное поле известно из соотношения (176), внешнего поля нет. Разобьем систему зарядов мысленно на малые “кусочки” = “элементы”, нумеруя их индексами $i, k, \dots$. Каждый из таких малых элементов — тоже “система зарядов” с плотностью $\rho_i(x)$, являющейся сужением полной плотности $\rho(x)$ на область пространства V_i , занимаемую данным элементом: $\rho_i(x) = \rho(x)$ при $x \in V_i$ и $\rho_i(x) = 0$ при $x \notin V_i$. Отсюда вытекает очевидное равенство:

$$\rho(x) = \sum_i \rho_i(x). \quad (236)$$

Обозначим через U_{ik} потенциальную энергию элемента i во внешнем поле, создаваемым другим элементом k . Из соотношений (226), (176) получаем:

$$U_{ik} = \int dx \rho_i(x) \varphi_k(x) = \iint dx dy \rho_i(x) \rho_k(y) / |x - y|. \quad (237)$$

Отсюда видно, что $U_{ik} = U_{ki}$, как и должно быть из общих соображений. Другой важный момент: соотношение (237) можно считать определением

величины U_{ii} , которую нельзя истолковать как “потенциальную энергию одного элемента в поле другого”.

Из приведенного в начале раздела общего принципа следует, что “собственной энергией системы” является сумма энергий взаимодействия всех ее частей в пределе бесконечно малого дробления, т. е. в данном случае $\sum U_{ik}$ с суммированием по $i < k$ (поскольку энергия взаимодействия элементов i и k должна учитываться однократно). Пользуясь симметрией $U_{ik} = U_{ki}$, сумму по $i < k$ можно переписать в виде полусуммы по $i \neq k$, а затем — в виде суммы по всем ik минус сумма ее диагональных вкладов:

$$U^{\text{соб}} = \lim \sum_{i < k} U_{ik} = \frac{1}{2} \lim \left\{ \sum_{ik} U_{ik} - \sum_i U_{ii} \right\}. \quad (238)$$

Символ “lim” здесь и далее обозначает предел “бесконечно малого дробления” (уточнение ниже).

Обозначим в (238) через $N1$ и $N2$ два вклада в скобке $\{...\}$. Покажем, что вклад $N1$ не зависит от способа дробления системы, а вклад $N2$ в пределе бесконечно малого дробления исчезает. Действительно, для вклада $N1 = \sum U_{ik}$ с U_{ik} из (237) суммирование по всем i, k можно внести под знак интегрирования, что даст в подынтегральном выражении величину $\sum_i \rho_i(x) \sum_k \rho_k(y) = \rho(x)\rho(y)$ в силу соотношения (236). Итого:

$$N1 \equiv \sum_{ik} U_{ik} = \iint dx dy \rho(x) \rho(y) / |x - y|. \quad (239)$$

Из ответа видно, что данный вклад не зависит от способа разбиения системы, поэтому символ “lim” в (238) перед ним можно опустить.

Рассмотрим теперь вклад $N2$ в (238). Будем считать “разумным предположением” ограниченность плотности заряда: $|\rho(x)| < \text{const}$. При оценке вклада $N2 = \sum U_{ii}$ для конкретности предположим, что система разбита на малые кубики со стороной a , и нас интересует предел $a \rightarrow 0$. Ясно, что число таких кубиков есть величина порядка a^{-3} — отношение фиксированного объема системы к объему кубика $\propto a^3$. С другой стороны, определяемый из соотношения (237) с $i = k$ вклад одного кубика U_{ii} при $|\rho| < \text{const}$ оценивается по размерности величиной порядка a^5 (в (237) два интегрирования по трехмерному пространству и один множитель $|x - y|$ с размерностью длины в знаменателе). Таким образом, вклад $N2 = \sum U_{ii}$ оценивается как произведение числа кубиков $\propto a^{-3}$ на вклад каждого из них $\propto a^5$, что дает величину порядка a^2 , исчезающую в пределе $a \rightarrow 0$.

Итого, предел $a \rightarrow 0$ в (238) существует и совпадает с известным из (239) вкладом $N1$ в (238):

$$U^{\text{соб}} = \frac{1}{2} \iint dx dy \rho(x) \rho(y) / |x - y| = \frac{1}{2} \int dx \rho(x) \varphi(x), \quad (240)$$

где $\varphi(x)$ — потенциал (176), создаваемый самой системой.

Сравнивая последнее выражение в (240) и (226), видим, что различие лишь в добавочном коэффициенте $1/2$ в (240) и в интерпретации $\varphi(x)$: в (226) это произвольный потенциал внешнего поля, а в (240) — потенциал, создаваемый самой системой.

Выражение (240) получено для объемного распределения зарядов в предположении ограниченности плотности $\rho(x)$. В иных случаях, например, для распределенных по поверхностям или линиям зарядам формулой (240) можно пользоваться лишь при условии сходимости входящих в нее интегралов. Ясно, что для точечного заряда ответ (240) не имеет смысла, так как его потенциал $\varphi \propto 1/r$ в самой точке расположения заряда $r = 0$ обращается в бесконечность. Конечно, это следствие идеализации, заключенной в самом понятии “точечный заряд”, — в реальной жизни все “размазано”. Для системы точечных зарядов $\{e_a\}$ корректно определена энергия их взаимодействия ΣU_{ab} с суммированием по $a < b$, а собственная энергия U_{aa} каждого из зарядов смысла не имеет.

Магнитостатика. Все сказанное выше об электростатике переносится на магнитостатику практически дословно и конечный результат аналогичен (240): собственная полная потенциальная энергия системы токов отличается от энергии во внешнем поле (235) только добавочным коэффициентом $1/2$ и интерпретацией векторного потенциала $\vec{A}$, который теперь считается потенциалом (177), создаваемым самой системой:

$$U^{\text{соб}} = \frac{1}{2c^2} \iint dx dy (\vec{j}(x) \vec{j}(y)) / |x - y| = \frac{1}{2c} \int dx (\vec{A}(x) \vec{j}(x)), \quad (241)$$

согласно соотношениям (235) и (177). Заменой $dx \vec{j}(x) \rightarrow d\vec{J}(x)$ получим геометрически-ковариантную запись (241), пригодную при должной интерпретации $d\vec{J}$ для любой геометрии системы токов. В частности, для контуров $d\vec{J}(x) = Id\vec{x}$ согласно (164). Для одного контура интеграл по x, y в (241) логарифмически расходится из-за “нуля” $|x - y|$ при $y \rightarrow x$ в знаменателе для пробегающих по одному контуру переменных x и y . Для системы из нескольких контуров, как и для точечных зарядов, корректно

определенной величиной является U_{ab} — энергия взаимодействия контура “ a ” с контуром “ b ”:

$$U_{ab} = L_{ab} I_a I_b, \text{ где } L_{ab} = c^{-2} \int \int_{(a)(b)} (d\vec{x} d\vec{y}) / |x - y|. \quad (242)$$

Не зависящую от токов величину L_{ab} называют коэффициентом взаимной индукции контуров “ a ” и “ b ”, переменная x в интеграле для L_{ab} пробегает по контуру “ a ”, а переменная y — по контуру “ b ”. Из (242) видно, что $L_{ab} = L_{ba}$ и $U_{ab} = U_{ba}$.

Положив в (242) формально $a = b$, мы определяем величину L_{aa} — коэффициент самоиндукции контура “ a ”. Как уже говорилось, для идеального контура с бесконечно тонким проводом эта величина расходится. Но очевидно, что это результат “идеализации”: если считать поперечное сечение провода сколь угодно малым, но конечным, то коэффициент самоиндукции L_{aa} будет конечным.

Полная потенциальная энергия для системы взаимодействующих контуров в обозначениях (242) имеет вид

$$U^{\text{свб}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} L_{ab} I_a I_b. \quad (243)$$

Сумма вкладов с $a \neq b$ — энергия взаимодействия контуров, вклады с L_{aa} — собственная энергия контуров с указанными выше оговорками.

Переход от энергии системы к энергии поля. Покажем, что определенная выше собственная потенциальная энергия системы совпадает с энергией создаваемого ею поля, т. е. это всего лишь разные интерпретации одной и той же величины.

Начнем с электростатики, в которой собственная потенциальная энергия системы определяется соотношением (240) с созданным самой системой потенциалом φ (176). Входящую в (240) величину ρ можно выразить через φ с помощью соотношения (175): $4\pi\rho = -\Delta\varphi = -\partial_i\partial_i\varphi$, откуда следует $\rho = -\partial_i\partial_i\varphi/4\pi$. Подставив это выражение для ρ в (240) и перебросив интегрированием по частям одну из производных ∂_i на второй сомножитель, с учетом равенства $E_i = -\partial_i\varphi$ получаем:

$$U^{\text{свб}} = \int dx \rho \varphi / 2 = - \int dx \varphi \partial_i \partial_i \varphi / 8\pi = \int dx \partial_i \varphi \partial_i \varphi / 8\pi = \int dx E^2 / 8\pi. \quad (244)$$

При сравнении с известным из (129) выражением $W = (E^2 + H^2)/8\pi$ для плотности энергии электромагнитного поля видим, что в электростатике собственная потенциальная энергия системы зарядов совпадает с энергией создаваемого ей электрического поля. Это справедливо и для магнитоэлектростатики: с помощью уравнения Максвелла $\text{rot } \vec{H} = (4\pi/c)\vec{j}$ нетрудно показать, что полная собственная энергия системы токов (241) может быть преобразована к виду $\int dx H^2/8\pi$, т. е. совпадает с энергией магнитного поля, создаваемого данной системой токов.

Итак, собственная потенциальная энергия системы зарядов или токов совпадает с энергией создаваемого этой системой поля, т. е. фактически это просто разные варианты интерпретации одной и той же величины. Поэтому нужно следить за тем, чтобы эта величина не учитывалась дважды в различных соотношениях баланса энергии.

3.8 Диэлектрики и магнетики (статика)

Общее описание. До сих пор речь шла о полях в вакууме. Теперь мы переходим к обсуждению уравнений электродинамики для материальных сред — диэлектриков и магнетиков.

Скажем сначала несколько слов о классификации “металл — диэлектрик”. В общем случае в среде под воздействием электрического поля $\vec{E}$ возникает ток $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, коэффициент σ называют проводимостью. В любой реальной среде эта величина конечна, но в теории для упрощения всегда предпочитают иметь дело с идеализированными системами, типичный пример — “материальная точка”. В нашем случае такой идеализацией являются понятия “идеального металла” и “идеального диэлектрика”, — в первом случае $\sigma = \infty$, во втором $\sigma = 0$. В дальнейшем термины “металл” и “диэлектрик” понимаются именно таким образом, уточнение “идеальный” подразумевается.

В металле сколь угодно слабое поле $\vec{E}$ приводит к появлению бесконечно сильного тока $\vec{j}$, что в статике невозможно. Отсюда следует, что внутри металла $\vec{E} = 0$, а соответствующий потенциал φ — константа. Никаких объемных зарядов внутри металла быть не может (ибо $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ и $\varphi = \text{const}$), допустимы лишь поверхностные заряды на границе металлического тела.

В диэлектриках $\sigma = 0$, т. е. поле $\vec{E}$ не порождает токов. Основной механизм воздействия поля на среду — возникновение поляризации, т. е. электрического дипольного момента у каждого малого элемента среды. Количественной характеристикой этого эффекта является “вектор поляризации” $\vec{P}$ — дипольный (электрический) момент единицы объема. Это значит, что бесконечно малый объем dx вокруг точки x имеет дипольный момент $\vec{P}(x)dx$.

Есть два типичных механизма возникновения поляризации:

1. “Упругие диполи”. Это такая среда, молекулы которой без поля не имеют собственного дипольного момента, но под воздействием поля он возникает из-за “раздвижения” составляющих молекулу положительных и отрицательных зарядов. Простой пример — заряды $\pm e$, соединенные пружиной, длина которой без поля равна нулю. Под воздействием поля заряды расходятся в разные стороны, т. е. пружинка растягивается и система становится диполем.

2. “Ориентационный механизм”. В этом случае молекулы среды и без поля имеют собственный дипольный момент, но эти моменты ориентированы хаотически, поэтому “в среднем” взаимно сокращаются. При включении поля $\vec{E}$ дипольные моменты молекул стремятся сориентироваться вдоль него, что и приводит к появлению макроскопической поляризации $\vec{P}$.

Существуют также вещества, называемые “сегнетоэлектриками”, для которых поляризация $\vec{P}$ отлична от нуля даже при нулевом внешнем поле $\vec{E}$ (это электрические аналоги ферромагнетиков). Мы упомянули о них только “для сведения”, а в дальнейшем, как правило, будем говорить лишь о простейших однородных и изотропных диэлектриках, для которых $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, числовой коэффициент α называют “поляризуемостью”.

Также лишь “для сведения” отметим, что два описанных выше механизма возникновения поляризации должны существенно различаться по температурной зависимости поляризуемости α . При втором механизме поле ориентирует диполи, т. е. порождает “тенденцию к порядку”, а конкурирующим механизмом является тепловое движение, порождающее “тенденцию к хаосу”. Ясно, что в простейшем приближении величина эффекта определяется отношением энергии диполя во внешнем поле к характерной тепловой энергии kT . Поэтому в данном случае поляризуемость α должна зависеть от температуры T и эта зависимость качественно известна: $\alpha \propto 1/T$.

В случае первого механизма — “упругие диполи” — порождаемый полем эффект раздвижения зарядов конкурирует с силами упругости внутри самой молекулы и все это не имеет никакого отношения к тепловому движению. Поэтому в данном случае поляризуемость α не должна зависеть от температуры T . Различие в температурной зависимости α для двух типов диэлектриков четко проявляется в экспериментах.

Все сказанное выше о диэлектриках переносится практически дословно и на магнетики. Аналогом поляризации $\vec{P}$ для магнетиков является намагниченность $\vec{M}$ — магнитный момент единицы объема, а внешним полем — $\vec{H}$. Различают “ферромагнитные”, “парамагнитные” и “диамагнитные” вещества. Для ферромагнетиков имеется спонтанная намагниченность $\vec{M} \neq 0$ при нулевом внешнем поле (электрический аналог — сегнетоэлектрики), и в этом случае нет простой зависимости $\vec{M}$ от $\vec{H}$. Для магнетиков типа “дна” и “пара” зависимость $\vec{M}$ от $\vec{H}$ линейная: $\vec{M} = \chi \vec{H}$, коэффициент χ называют “магнитной восприимчивостью”. Аналогичная формула для диэлектриков имела вид $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, а коэффициент поляризуемости α всегда положителен. Для магнетиков иначе: коэффициент χ в соотношении $\vec{M} = \chi \vec{H}$ может иметь любой знак. Вещества с $\chi > 0$ называют парамагнетиками, а вещества с $\chi < 0$ — диамагнетиками.

Свободные и связанные источники. Для уравнений в вакууме мы называли источниками объемные плотности заряда ρ и тока $\vec{j}$. Для уравнений в среде необходимо различать понятия “свободных источников”, “связанных источников” и их сумм — “полных источников”. “Свободными” называют те источники, которые просто вносятся в систему по условиям задачи. Типичный пример формулировки: “пусть есть диэлектрическая среда, в которую помещен заданный свободный заряд e ”.

Нетривиально лишь понятие “связанных источников”. Как уже говорилось, количественными характеристиками поляризации среды являются вектор поляризации $\vec{P}$ для диэлектриков и аналогичная величина $\vec{M}$ для магнетиков. Ясно, что каждый бесконечно малый элемент среды можно понимать как точечный диполь, и этот диполь создает поле, известное из соотношений (196), (208). Суммируя вклады от всех малых элементов среды, можно найти поле, создаваемое поляризацией. С другой стороны, любому полю соответствует некоторое объемное распределение зарядов или токов, которые легко найти по известным полям с помощью соотношений (172). Другими словами, поле, создаваемое поляризацией среды, всегда можно представить как поле, создаваемое некоторыми объемными зарядами или токами, — они и называются “связанными источниками”.

Выражение связанных источников через поляризацию. Основная идея уже была изложена выше, сейчас мы переходим к выводу конкретных формул.

Электростатика. Пусть x — точка наблюдения, y — произвольная точка внутри среды, dy — дифференциал объема вокруг точки y . Бесконечно малый элемент поляризованной среды можно считать точечным диполем, создаваемое им поле известно из соотношения (196). Роль дипольного момента $\vec{d}$ в (196) играет дипольный момент $\vec{P}(y)dy$ данного элемента среды, а роль $\vec{r}$ — разность трехмерных векторов $x - y$ (по соглашению, “стрелки” над x и y не ставим).

Таким образом, вклад в $\varphi(x)$ от данного элемента среды равен $dy\vec{P}_i(y)(x_i - y_i)/|x - y|^3$, где мы перешли к индексным обозначениям. Интегрируя по y , находим потенциал, создаваемый всей средой:

$$\varphi(x) = \int dy\vec{P}_i(y)(x_i - y_i)/|x - y|^3. \quad (245)$$

Воспользуемся теперь соотношением

$$(x_i - y_i)/|x - y|^3 = (\partial/\partial y_i)[1/|x - y|] \quad (246)$$

(оно легко получается из первого равенства (193) заменой $x \rightarrow x - y$). Подставим (246) в (245) и затем перебросим производную $\partial/\partial y_i$ интегрированием по частям на $\vec{P}_i(y)$. В итоге получим:

$$\varphi(x) = - \int dy \operatorname{div} \vec{P}(y)/|x - y|. \quad (247)$$

Сравнивая выражения (247) и (176), находим плотность заряда $\rho(y)$, соответствующую данному потенциалу $\varphi(x)$. Это и есть, по определению, искомая плотность связанного заряда. В итоге получаем $\rho^{\text{связ}} = -\operatorname{div} \vec{P}$.

Магнитостатика. Все рассуждения аналогичны приведенным выше, базовыми формулами являются теперь выражение (208) для векторного потенциала $\vec{A}$ точечного магнитного диполя и соотношение (177). Для малого элемента среды роль $\vec{m}$ в (208) играет величина $\vec{M}(y)dy$, $\vec{r} = x - y$. Переходя в (208) к индексным обозначениям, можно сразу написать аналогичное (245) выражение для создаваемого средой потенциала:

$$\vec{A}_i(x) = \varepsilon_{ikl} \int dy \vec{M}_k(y)(x_l - y_l)/|x - y|^3.$$

Воспользовавшись соотношением (246) и перебросив затем производную $\partial/\partial y_l$ интегрированием по частям на множитель $\vec{M}_k(y)$, получим

$$\vec{A}_i(x) = -\varepsilon_{ikl} \int dy [\partial \vec{M}_k(y) / \partial y_l] / |x - y| = \int dy [\text{rot } \vec{M}(y)]_i / |x - y|.$$

Сравнив полученное выражение и (177), заключаем, что $\vec{j}^{\text{связ}} = c \text{rot } \vec{M}$.

Итого, мы получили следующие формулы:

$$\begin{aligned} \rho^{\text{связ}} &= -\text{div } \vec{P}, \\ \vec{j}^{\text{связ}} &= c \text{rot } \vec{M}. \end{aligned} \quad (248)$$

Это и есть искомые соотношения, выражающие связанные источники через характеристики поляризации среды в статике (уточнение “в статике” приведено потому, что в динамике второе соотношение (248) будет модифицировано).

Статические уравнения Максвелла для диэлектриков и магнетиков. Сформулируем сначала общий принцип вывода уравнений Максвелла в среде. Для уравнений в вакууме мы имели дело с напряженностями $\vec{E}$, $\vec{H}$ и с источниками ρ , $\vec{j}$. В среде мы имеем “свободные” и “связанные” источники, их суммы — “полные” источники. Будем называть “полными” поля, создаваемые “полными” источниками. В такой терминологии справедливо *общее правило*: для полных полей справедливы обычные (как для вакуума) уравнения Максвелла с полными источниками.

Но здесь нужны уточнения. Прежде всего, следует условиться, какими буквами будут обозначаться и как называться полные поля.

Соглашение: в электростатике полное поле обозначается через $\vec{E}$ и называется “напряженностью”, а в магнитостатике полное поле обозначается через $\vec{B}$ и называется “индукцией”.

Это традиционное и общепринятое соглашение относительно обозначений и терминологии. Забегая вперед, сразу скажем, что помимо полных полей потом будут введены и “другие”: в электростатике это будет вектор $\vec{D}$, называемый индукцией, а в магнитостатике — вектор $\vec{H}$, называемый напряженностью. Для уравнений в вакууме $\vec{D} = \vec{E}$ и $\vec{B} = \vec{H}$, и тогда мы пользовались переменными $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Общий принцип вывода уравнений Максвелла в среде следующий: сначала пишутся обычные (как в вакууме) уравнения для полных полей с полными источниками, последние представляются в виде “свободных” плюс “связанных”. Однородные уравнения Максвелла сохраняют обычный вид

(как в вакууме), только теперь вместо $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в них должны фигурировать полные поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. В неоднородных уравнениях вклады связанных источников выражаются через поляризацию с помощью соотношений (248) и затем переносятся в левые части уравнений, тогда в них и появляются отличные от полных полей величины. Сейчас мы проделаем все это подробно.

Электростатика. По соглашению, полное поле обозначаем через $\vec{E}$ и пишем для него обычные уравнения (165) с полным источником ρ :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho^{\text{полн}} = 4\pi(\rho^{\text{своб}} + \rho^{\text{связ}}). \quad (249)$$

Выразив здесь $\rho^{\text{связ}}$ через поляризацию $\vec{P}$ с помощью первого соотношения (248) и перенеся затем этот вклад в левую часть, приведем второе уравнение (249) к виду $\operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho^{\text{своб}}$. Величину под знаком div обозначают через $\vec{D}$ и называют “индукцией”: $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$.

Итого, мы пришли к следующей окончательной формулировке статических уравнений Максвелла для диэлектриков:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho^{\text{своб}}, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \quad (250)$$

Запись второго уравнения в форме (250) предпочтительнее его аналога в (249), поскольку считать заданными можно только свободные источники.

Система уравнений (250) еще неполна, так как при практических расчетах необходимо знать связь между $\vec{P}$ и $\vec{E}$. Для однородного и изотропного диэлектрика эта связь линейная:

$$\vec{P} = \alpha\vec{E}, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha, \quad (251)$$

коэффициент α — поляризуемость, ε называют диэлектрической проницаемостью. Уравнений (250) вместе с (251) уже вполне достаточно для решения конкретных задач с однородными и изотропными диэлектриками. Но следует подчеркнуть, что уравнения Максвелла (250) справедливы для любого диэлектрика, так как они получены без всяких предположений относительно его свойств. От них зависит лишь явный вид зависимости $\vec{P}$ от $\vec{E}$, которая может быть не такой, как в (251). Например, для анизотропного диэлектрика поляризуемость α является матрицей, правая часть равенства $\vec{P} = \alpha\vec{E}$ понимается как действие матрицы α на вектор $\vec{E}$, т. е. $\vec{P}_i = \alpha_{ik}\vec{E}_k$. Для изотропного диэлектрика $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$, константа α — поляризуемость. Уточним также, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{E}$ зависят от координат x ,

а поляризуемость α или матрица α_{ik} для однородного диэлектрика от x не зависят, — это и означает “однородность”.

Магнитостатика. В этом случае полным полем, по соглашению, считается $\vec{B}$, а уравнения Максвелла (166) для “полного поля с полными источниками” принимают вид:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = (4\pi/c) \vec{j}^{\text{полн}} = (4\pi/c) [\vec{j}^{\text{своб}} + \vec{j}^{\text{связ}}]. \quad (252)$$

Подставив сюда выражение для $\vec{j}^{\text{связ}}$ из (248) и перенеся затем этот вклад в левую часть, получим $\operatorname{rot}(\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = (4\pi/c) \vec{j}^{\text{своб}}$. Величину под знаком rot обозначают через $\vec{H}$ и называют напряженностью. Итого, уравнения магнитостатики принимают следующий вид:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = (4\pi/c) \vec{j}^{\text{своб}}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}. \quad (253)$$

Аналогия с уравнениями электростатики (250) очевидна. Для однородных и изотропных “диа” и “пара” магнетиков аналогом (251) являются соотношения

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \mu \vec{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi, \quad (254)$$

где χ — магнитная восприимчивость, а коэффициент μ называют магнитной проницаемостью. Как и в случае диэлектриков, общие уравнения Максвелла (253) справедливы для магнетиков любого типа, в том числе и для ферромагнетиков, для которых простые соотношения (254) не выполняются.

Введение потенциалов. Из однородных уравнений (250) для $\vec{E}$ и (253) для $\vec{B}$ следует, что

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (255)$$

где φ — скалярный потенциал, $\vec{A}$ — векторный. Подстановка величин (255) в неоднородные уравнения (250), (253) при известной связи $\vec{D}$ с $\vec{E}$ и $\vec{B}$ с $\vec{H}$ приводит к уравнениям для потенциалов φ , $\vec{A}$.

Условия сшивания на границе раздела двух сред. Типичная ситуация — граница раздела двух диэлектриков с разными значениями диэлектрической проницаемости ε или двух магнетиков с разными значениями μ . Общий принцип получения условий сшивания подробно излагался в начале курса в п. 1.4. Напомним его кратко: с помощью теорем Остроградского — Гаусса и Стокса дифференциальные уравнения Максвелла переносываются в интегральной форме. Затем постулируется, что интегральная форма уравнений остается справедливой и для тех

объемов или контуров, которые пересекают границу раздела, отсюда по стандартным правилам выводятся искомые условия сшивания. Поэтому читатель уже должен уметь самостоятельно по любому из дифференциальных уравнений (250), (253) написать по аналогии с (10) соответствующее условие сшивания (часто говорят “краевое условие”, и мы также будем пользоваться этим термином). Приведем их во избежание недоразумений: в электростатике из (250) следует

$$\Delta \vec{E}_t = 0, \quad \Delta \vec{D}_n = 4\pi\sigma^{\text{своб}}, \quad (256)$$

а в магнитостатике из (253) следует

$$\Delta \vec{B}_n = 0, \quad \Delta \vec{H}_t = (4\pi/c)[\vec{n} \times \vec{i}^{\text{своб}}]. \quad (257)$$

В этих формулах индексами “ n ” и “ t ” обозначаются, соответственно, нормальные и касательные составляющие векторов, символ Δ обозначает “приращение = скачок” (не путать с оператором Лапласа), σ — поверхностная плотность заряда, $\vec{i}$ — плотность поверхностного тока (двумерный вектор).

Для расчета полей нужны лишь уравнения Максвелла и условия сшивания (256), (257). Но иногда полезны аналогичные условия сшивания для полных полей и источников, вытекающие из (249) и (252):

$$\Delta \vec{E}_n = 4\pi\sigma^{\text{полн}}, \quad \Delta \vec{B}_t = (4\pi/c)[\vec{n} \times \vec{i}^{\text{полн}}]. \quad (258)$$

Они не являются независимыми и не нужны для расчета полей. Но их можно использовать при уже известных полях для расчета поверхностных плотностей связанных зарядов и токов (если есть такое желание): из (258) по известным полям находятся полные плотности, свободные всегда считаются заданными, разность “полные минус свободные” — искомые плотности связанных поверхностных источников.

В заключение приведем и докажем важное с точки зрения практических расчетов *утверждение*: условие сшивания $\Delta \vec{E}_t = 0$ эквивалентно условию непрерывности потенциала φ на границе раздела.

Доказательство. Пусть φ^I и φ^{II} — потенциалы с двух сторон от границы раздела S и $\psi = \varphi^I - \varphi^{II}$ — разность их предельных значений на поверхности S . Рассмотрим приращение $d\psi$ функции ψ при бесконечно малом смещении $d\vec{x}$ точки x по поверхности S . Вектор $d\vec{x}$ ортогонален вектору нормали к поверхности $\vec{n}$.

Имеем: $d\psi = dx_i \partial_i \psi = dx_i \partial_i (\varphi^I - \varphi^{II})$. Учитывая равенство $\vec{E}_i = -\partial_i \varphi$, получаем: $d\psi = dx_i (\vec{E}_i^{II} - \vec{E}_i^I) = d\vec{x}(\vec{E}^{II} - \vec{E}^I)$ — скалярное произведение векторов. Поскольку $d\vec{x} \perp \vec{n}$, каждый из векторов $\vec{E}$ в полученном выражении можно заменить его касательной составляющей $\vec{E}_t$. В итоге получаем: $d\psi = d\vec{x}(\vec{E}_t^{II} - \vec{E}_t^I) = 0$, поскольку на поверхности $\vec{E}_t^{II} = \vec{E}_t^I$ в силу условия сшивания $\Delta \vec{E}_t = 0$.

Итак, мы показали, что $d\psi = 0$ при любом сдвиге вдоль поверхности S , следовательно, на этой поверхности $\psi = \text{const}$. Поскольку $\psi = \varphi^I - \varphi^{II}$, это означает, что предельные значения на S потенциалов φ^I и φ^{II} различаются только на константу. Эту константу без ограничения общности можно считать равной нулю, пользуясь калибровочным произволом $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$ для каждой из областей. Тогда на поверхности $\varphi^I = \varphi^{II}$, т. е. потенциал непрерывен — его предельные значения при подходе к поверхности S с разных сторон совпадают.

Таким образом, в качестве полного набора условий сшивания на границе раздела двух диэлектриков можно использовать следующие два:

$$1) \text{ непрерывность потенциала, } 2) \Delta \vec{D}_n = 4\pi\sigma^{\text{своб}}. \quad (259)$$

При практических расчетах условие непрерывности потенциала гораздо удобнее, чем эквивалентное условие непрерывности касательных составляющих вектора $\vec{E}$.

На границе раздела металл — диэлектрик единственное условие — непрерывность потенциала, вытекающее из $\Delta \vec{E}_t = 0$. Поскольку внутри металла $\varphi = \text{const}$, то же значение должен иметь и предел потенциала φ со стороны диэлектрика. Таким образом, краевое условие для потенциала φ в диэлектрике на границе с металлом есть

$$\varphi = \text{const}, \quad (260)$$

где const — значение потенциала внутри металла.

Общие соображения о связи $\vec{P}$ и $\vec{E}$. Приведем в заключение, в основном только “для сведения”, некоторые соображения о возможной зависимости $\vec{P}$ от $\vec{E}$. Итак, мы считаем, что вектор поляризации $\vec{P}(x)$ — некоторая функция (точнее, функционал) от поля $\vec{E}(x)$. Естественно представить $\vec{P}$ в форме ряда по $\vec{E}$, символически

$$\vec{P}_i = \vec{P}_i^{(0)} + \alpha_{ik} \vec{E}_k + \alpha_{ikl} \vec{E}_k \vec{E}_l + \dots \quad (261)$$

Вклад $\vec{P}_i^{(0)}$ присутствует только для сегнетоэлектриков. В дальнейшем будем говорить лишь о “нормальных диэлектриках”, для которых $\vec{P}_i^{(0)} = 0$. Обычно связь между $\vec{P}$ и $\vec{E}$ считается линейной, что соответствует второму слагаемому в правой части (261). Ясно, что влияние нелинейностей типа квадратичного по $\vec{E}$ вклада в (261) возрастает с усилением поля $\vec{E}$. Наиболее сильные поля в лабораторных условиях создаются сейчас в лазерном излучении, и их интенсивности таковы, что в (261) уже нужен учет квадратичных по $\vec{E}$ вкладов. Изучение разнообразных явлений с учетом таких вкладов есть предмет сравнительно молодой науки — нелинейной оптики, которая сейчас интенсивно развивается.

Для обычных (не лазерных) полей $\vec{E}$, достижимых в лабораторных условиях, в соотношении (261) достаточно ограничиваться линейным по $\vec{E}$ вкладом. Но и здесь еще остается много возможностей: поскольку $\vec{P}$ и $\vec{E}$ — функции от пространственных координат x , линейная связь между ними в общем случае представляется линейным интегральным оператором: $\vec{P}_i(x) = \int dx' \alpha_{ik}(x, x') \vec{E}_k(x')$ с некоторыми “ядрами” $\alpha_{ik}(x, x')$. При наличии трансляционной инвариантности эти ядра зависят лишь от разности $x - x'$. Тогда после перехода к преобразованиям Фурье получается обычное (без интегрирований) соотношение $\vec{P}_i = \alpha_{ik} \vec{E}_k$, в котором все величины понимаются как фурье-образы исходных и являются функциями сопряженной с координатами x переменной — волнового вектора $\vec{k}$. Если коэффициенты α_{ik} зависят от $\vec{k}$, то говорят, что имеет место явление “пространственной дисперсии”. При обобщении на динамику у всех величин появляется дополнительный временной аргумент t , которому соответствует частота ω в фурье-образах. Зависимость коэффициентов поляризуемости α от ω называют “частотной дисперсией”.

Явление “дисперсии”, т. е. зависимость фурье-образов коэффициентов α от волнового вектора $\vec{k}$ (пространственная дисперсия) и от частоты ω (частотная дисперсия) наблюдается экспериментально в различных средах.

Продвигаясь далее в сторону упрощения, перейдем к классу диэлектриков с “локальной реакцией”. Это значит, что поляризация $\vec{P}(x)$ в точке x зависит только от значения поля $\vec{E}(x)$ в этой же точке, т. е. $\vec{P}_i(x) = \alpha_{ik}(x) \vec{E}_k(x)$.

Следующий шаг — предположение об “однородности среды”, что означает независимость от x коэффициентов α_{ik} . Последнее упрощение — условие “изотропности среды”, что означает $\alpha_{ik} = \alpha \delta_{ik}$, коэффициент

α — поляризуемость. В этом случае для диэлектриков справедливы соотношения (251). В дальнейшем мы будем рассматривать *однородный и изотропный диэлектрик* в качестве простейшего (и притом наиболее важного с практической точки зрения) примера.

Добавим в заключение несколько слов о количественной оценке влияния поляризации, о котором для нормальных веществ можно судить по величине соответствующих вкладов в ϵ и μ . Для диэлектриков это влияние весьма значительное: измеряемые экспериментально для различных веществ значения диэлектрической проницаемости $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha$ выражаются числами порядка нескольких единиц или десятков единиц. Для нормальных “диа” или “пара” магнетиков, напротив, эффекты поляризации количественно очень слабые: величина $\mu = 1 + 4\pi\chi$ отличается от единицы лишь вкладами порядка 10^{-4} – 10^{-5} . В отличие от этого, для ферромагнетиков влияние поляризации очень сильное. Для них связь между B и H нелинейная, поэтому вместо μ следует оценивать отношение B/H . Это отношение для разных ферромагнетиков есть величина порядка 10^2 – 10^5 .

3.9 Основы термодинамики диэлектриков и магнетиков. Объемные силы в диэлектриках и магнетиках

Напоминание: основные положения классической термодинамики. Пусть есть некоторая система, состояние которой задается некоторым набором параметров. *Внутренняя энергия системы* U есть такая функция состояния, для которой при любом бесконечно малом изменении состояния системы выполняется “первое начало термодинамики”:

$$dU = dQ + dA_{\text{в. с.}}, \quad (262)$$

где $dQ = TdS$ — полученное системой тепло, $dA_{\text{в. с.}}$ — работа внешних сил, затрачиваемая на изменение состояния системы. Равенство $dQ = TdS$, в котором T — температура, можно считать термодинамическим определением энтропии S .

Вид работы внешних сил $dA_{\text{в. с.}}$ зависит от конкретной задачи. В дальнейшем в качестве простейшего примера мы будем рассматривать газ в

объеме V с давлением P . Тогда формула (262) конкретизируется следующим образом:

$$dU = TdS - PdV, \quad (263)$$

поскольку PdV — работа самого газа при изменении его объема, а работа внешних сил — та же величина с обратным знаком (здесь очевидная аналогия с формулой (222)).

Определение: пары переменных типа T, S и P, V в (263) называют “термодинамически взаимно сопряженными”. *Утверждение:* в каждой такой паре независимой можно считать лишь одну из двух переменных, вторая — функция первой и всех прочих. *Определение:* естественными переменными любой термодинамической функции состояния X называются те, дифференциалы которых входят в выражение dX . Пример: для внутренней энергии U естественными переменными следует считать, согласно (263), энтропию S и объем V .

Исходя из первичной величины — внутренней энергии U — можно построить другие функции состояния с размерностью энергии и с любым наперед заданным выбором естественных переменных внутри каждой пары. Например, если в паре S, T мы хотим сделать естественной переменной T вместо S , то нужно перейти к функции

$$F = U - TS, \quad (264)$$

для дифференциала которой с учетом (263) получаем

$$dF = -SdT - PdV. \quad (265)$$

Функцию F называют *свободной энергией*, ее естественными переменными являются T и V .

Аналогично можно ввести еще две подобные функции, добавляя к U или F величину PV . Тогда вклад $-PdV$ в (263) и (265) заменится на VdP , т. е. естественной переменной вместо объема V станет давление P . В общем случае при наличии n пар термодинамически сопряженных переменных можно построить 2^n функций с размерностью энергии, отправляясь от первичной величины — внутренней энергии U . С математической точки зрения переход от одной из таких функций к другой есть преобразование Лежандра по “таким-то переменным”. Здесь можно отметить аналогию с переходом от лагранжиана к гамильтониану в теоретической механике, — это тоже преобразование Лежандра с переходом от скоростей к импульсам в качестве естественных переменных.

Для любой величины типа U , F и т. п., если она рассматривается как функция своих естественных переменных (отметим, что это не обязательно), коэффициенты при дифференциалах естественных переменных в выражении для дифференциала функции являются, по определению, ее частными производными по этим переменным. Например, для функции $U = U(S, V)$ из (263) следует $\partial U/\partial S = T$, $\partial U/\partial V = -P$. Аналогично для свободной энергии в ее естественных переменных T , V из (265) имеем:

$$\partial F(T, V)/\partial T = -S, \quad \partial F(T, V)/\partial V = -P. \quad (266)$$

Отсюда получают много различных термодинамических соотношений, пользуясь очевидным свойством равенства смешанных производных. Например, с учетом (266) имеем: $\partial^2 F/\partial T \partial V = (\partial/\partial V)(\partial F/\partial T) = -\partial S/\partial V = (\partial/\partial T)(\partial F/\partial V) = -\partial P/\partial T$ и т. п.

Остается обсудить еще один важный вопрос — выбор термодинамической функции типа энергии, которую нужно использовать при определении равновесного состояния системы из условия минимума энергии. Поясним суть вопроса. Как известно, в механике статическое равновесное состояние системы определяется из условия минимума ее потенциальной энергии. В тех задачах, в которых существенна термодинамика, принцип тот же, но теперь возникает проблема: у нас есть много величин типа энергии (внутренняя, свободная и т. п.), поэтому требуется понять, какую именно из этих величин нужно использовать при определении равновесного состояния. На этот простой вопрос есть простой ответ, который будет сформулирован ниже.

Чтобы пояснить этот ответ, рассмотрим следующую конкретную задачу: пусть есть цилиндр с теплопроводящими (но не бесконечно быстро) стенками. В цилиндре под невесомым и герметичным поршнем находится газ под атмосферным давлением, все это во внешней среде с температурой T . Допустим теперь, что мы положили на поршень дополнительный груз. Ясно, что поршень тогда достаточно быстро опустится до некоторой высоты h_1 (явлениями типа возможных колебаний поршня пренебрегаем — их можно убрать, придерживая поршень). Ясно также, что газ при этом разогреется, если теплопроводность стенок не очень велика и система не успевает на этом первом этапе отдать тепло наружу. Затем из-за теплопроводности стенок газ в цилиндре будет постепенно охлаждаться и в конечном итоге его температура уравнивается с начальной, т. е. с температурой окружающей среды T . При этом поршень будет медленно опускаться и

в конечном итоге установится в некотором другом равновесном состоянии с высотой h_2 . Вопрос: как из соображений типа минимума энергии найти эти два равновесных значения h_1 и h_2 ?

Ответ следующий: ясно, что “в игру” входят, во-первых, потенциальная энергия груза в поле тяжести $U_{\text{гр}} = mgh$, во-вторых, некоторая термодинамическая величина типа энергии. Вопрос — какая? Ответ содержится в описании процесса: идеализируя, можно считать, что на первом этапе стенки цилиндра вообще не успевают отдавать тепло наружу. Такой процесс называется адиабатическим и для него $dQ = TdS = 0$. Таким образом, в данном процессе $dS = 0$, т. е. закреплена энтропия. Отсюда следует, что нужной для определения первого равновесного положения h_1 термодинамической величиной должна быть внутренняя энергия U , для которой закреплённая величина S является естественной переменной. Тогда при определении h_1 из условия $d[U_{\text{гр}} + U]/dh = 0$ при $S = \text{const}$ первый вклад в выражении (263) для dU исчезает и с учетом $U_{\text{гр}} = mgh$ мы приходим к обычному условию силового равновесия $mg = PdV/dh = PS_{\text{п}}$, где $S_{\text{п}}$ — площадь поршня, что и требуется.

Рассмотрим теперь второе положение равновесия h_2 , которое устанавливается после охлаждения газа в цилиндре до начальной температуры внешней среды T . Тот же процесс можно осуществить, если при опускании поршня придерживать его, чтобы процесс шел настолько медленно, что система успевает отдавать тепло и газ все время находится при начальной температуре T . Такой процесс называют изотермическим. Для него закреплённой является переменная T , являющаяся естественной для свободной энергии F . Поэтому при определении второго равновесного положения h_2 в качестве термодинамической энергии теперь следует использовать F , а не U . Условие минимума энергии и в этом случае сводится к условию силового равновесия $mg = PS_{\text{п}}$, но с другим значением давления P : в первом случае P связано с исходным атмосферным давлением $P_{\text{атм}}$ согласно формулам адиабатического процесса, во втором — изотермического. Эти формулы зависят, естественно, от свойств газа, но это уже не имеет отношения к обсуждаемой проблеме.

Обобщая сказанное выше, можно сформулировать следующий

Общий принцип: при определении равновесного состояния системы из условий типа минимума энергии в качестве термодинамической составляющей энергии нужно использовать ту величину, естественные переменные которой закреплёны по условиям конкретной задачи.

Обобщение: система, взаимодействующая с электрическим или магнитным полем. Вычисление работы внешних сил, необходимой для бесконечно малого изменения поля. Переходим теперь к нашей основной теме — термодинамика диэлектриков и магнетиков. Будем для простоты считать, что речь идет о той же системе, которая обсуждалась выше (газ в объеме V с давлением P), но теперь этот газ обладает свойствами диэлектрика или магнетика, поэтому взаимодействует с полем. Это поле (электрическое или магнитное) играет тогда роль дополнительной термодинамической переменной, задающей состояние системы. Все общие соотношения термодинамики сохраняются с тем очевидным изменением, что поле является функциональным, а не простым числовым аргументом, поэтому величины типа внутренней энергии U будут теперь функционалами от поля, а их производные по полю следует понимать как вариационные. Все это сугубо технические модификации, не меняющие сути дела.

Величина $dA_{в. с.}$ в основном соотношении (262) — работа внешних сил, необходимая для бесконечно малого изменения состояния системы. Теперь в число задающих состояние переменных включается и поле, поэтому нам нужно найти соответствующий вклад в $dA_{в. с.}$, т. е. работу внешних сил, необходимую для бесконечно малого изменения поля. Если мы найдем явное выражение для этой величины и добавим его в правые части соотношений (263) или (265), то получим базовые формулы для описания термодинамики диэлектриков и магнетиков (отметим, что в $dA_{в. с.}$ вклады от изменения различных переменных входят аддитивно).

Именно этим мы сейчас и займемся, но сначала примем следующее *соглашение*: бесконечно малое приращение величины X будем теперь обозначать через ΔX , понимая ΔX и дифференциал dX как один и тот же объект. Обозначение ΔX удобнее при записи формул, содержащих интегралы с дифференциалом объема dx , так как этот символ dx может путаться с вычисляемым объектом — приращением величины X .

Переходим теперь непосредственно к вычислению работы внешних сил $\Delta A_{в. с.}$, необходимой для бесконечно малого изменения поля.

Электростатика. Основные уравнения электростатики диэлектриков известны из (250), поля — $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Поскольку первичным источником поля являются свободные заряды, для его малого изменения достаточно произвести малое изменение плотности свободных зарядов $\rho^{своб}(x) \rightarrow \rho^{своб}(x) + \Delta \rho^{своб}(x)$ (напомним, что здесь символ Δ — знак приращения). Вопрос: какую работу должны совершить “внешние силы”,

чтобы произвести такое изменение плотности свободного заряда? Ответ получить нетрудно: изменение свободного заряда в объеме dx вокруг точки x есть $\Delta\rho^{\text{своб}}(x)dx$. Этот дополнительный заряд “внешние силы” должны “принести из бесконечности” и для этого они должны совершить работу $\varphi(x)\Delta\rho^{\text{своб}}(x)dx$, где $\varphi(x)$ — потенциал в точке x (на бесконечности потенциал считается равным нулю). Просуммировав вклады от всех элементов объема, получаем:

$$\Delta A_{\text{в. с.}} = \int dx \varphi(x) \Delta\rho^{\text{своб}}(x). \quad (267)$$

Поскольку мы вычисляем работу лишь в первом порядке по $\Delta\rho^{\text{своб}}$, потенциал φ в процессе переноса зарядов следует считать фиксированным, так как учет изменения φ после переноса части зарядов дает лишь несущественные поправки второго порядка малости по $\Delta\rho^{\text{своб}}$.

Таким образом, в первом порядке по $\Delta\rho^{\text{своб}}$ соотношение (267) является точным. Преобразуем его с учетом уравнений (250): $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho^{\text{своб}}$. Ввиду линейности это уравнение остается в силе и для приращений величин: $\text{div } \Delta\vec{D} = 4\pi\Delta\rho^{\text{своб}}$, откуда следует $\Delta\rho^{\text{своб}} = \text{div } \Delta\vec{D}/4\pi = \partial_i \Delta\vec{D}_i/4\pi$. Подставим это выражение в (267) и затем перебросим производную ∂_i на множитель φ интегрированием по частям. Тогда с учетом равенства $\partial_i\varphi = -\vec{E}_i$ получим:

$$\Delta A_{\text{в. с.}} = (1/4\pi) \int dx \vec{E}_i \Delta\vec{D}_i. \quad (268)$$

Это и есть окончательное выражение для работы внешних сил, необходимой для бесконечно малого изменения поля в электростатике.

Магнитостатика. Логика рассуждений здесь точно такая же, как в электростатике: первичным источником поля являются свободные токи $\vec{j}^{\text{своб}}$, поэтому требуется найти работу внешних сил $\Delta A_{\text{в. с.}}$, необходимую для бесконечно малого изменения $\Delta\vec{j}^{\text{своб}}$ свободных токов.

Прежде всего, нужно понять, почему для изменения свободных токов необходимо затрачивать работу и в чем состоит механизм процесса. В электростатике он был очень простой: “принесение дополнительного заряда из бесконечности”. В магнитостатике все основано на законе электромагнитной индукции Фарадея (2). Общие идеи аналогичны использованным в п. 3.6 при обсуждении полной потенциальной энергии взаимодействия контуров с током. Как и там, на промежуточных этапах необходимо рассматривать динамику процесса во времени, но конечные формулы приложимы к магнитостатике.

Итак, допустим, что мы каким-то образом сумели начать процесс изменения свободных токов. Тогда магнитное поле становится переменным и порождает по закону электромагнитной индукции (2) соответствующее “вихревое” электрическое поле $\vec{E}$. Для уравнений в среде запись уравнения (2) нужно изменить, подставив в него вместо $\vec{E}$ и $\vec{H}$ “полные поля” $\vec{E}$ и $\vec{B}$ согласно сформулированному при выводе статических уравнений Максвелла в среде общему принципу (см. п. 3.8):

$$\operatorname{rot} \vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{B} = 0. \quad (269)$$

Вихревое электрическое поле $\vec{E}$ оказывает воздействие на свободные токи, что очевидно, если представлять последние как потоки движущихся заряженных частиц. Это воздействие всегда таково, что поле $\vec{E}$ стремится воспрепятствовать начатому процессу изменения свободных токов. Чтобы все-таки выполнить такое изменение, следует допустить существование какого-то внешнего дополнительного воздействия (условно — “внешних сил”), которое компенсирует порождаемое вихревым полем $\vec{E}$ сопротивление изменению токов. Простейшая модель такого внешнего воздействия — введение некоторого “внешнего поля” $\vec{E}^{\text{вн}}$, компенсирующего $\vec{E}$:

$$\vec{E}^{\text{вн}} = -\vec{E} \quad (270)$$

(отметим аналогию с формулой (230)).

При введении компенсирующего внешнего поля мы можем произвести желаемое изменение свободных токов, равенство (270) в процессе этого изменения сохраняется. При этом “внешние силы”, представленные полем $\vec{E}^{\text{вн}}$, совершают некоторую работу, которую нам и нужно вычислить.

Начнем с вычисления мощности работы произвольного электрического поля $\vec{E}$ над произвольными токами $\vec{j}$, представляя их как поток частиц с зарядом e , движущихся со скоростью $\vec{v}$. Тогда $\vec{j} = e\vec{v}n$, где n — число частиц в единице объема. Поле $\vec{E}$ действует на одну частицу с силой $\vec{F} = e\vec{E}$, величина $(\vec{F}\vec{v})$ — мощность работы поля над одной частицей, величина $(\vec{F}\vec{v})n$ — мощность работы на единицу объема. Имеем: $(\vec{F}\vec{v})n = \vec{E}e\vec{v}n = (\vec{E}\vec{j})$. Это мощность работы поля $\vec{E}$ над токами $\vec{j}$ в единице объема. Для получения полной мощности перед этой величиной достаточно поставить знак $\int dx...$. Чтобы получить саму работу ΔA за малый интервал времени Δt , нужно просто умножить мощность на Δt .

Вернемся теперь к исходной задаче. В нашем случае под полем $\vec{E}$ в приведенных выше формулах следует понимать компенсирующее поле $\vec{E}^{\text{вн}}$ из (270), а под $\vec{j}$ — плотность свободного тока $\vec{j}^{\text{своб}}$. Тогда из сказанного выше получаем:

$$\Delta \mathcal{A}_{\text{в. с.}} = -\Delta t \int dx \vec{E} \vec{j}^{\text{своб}}, \quad (271)$$

где $\vec{E}$ — вихревое электрическое поле, определяемое из закона индукции Фарадея (269).

Подставим теперь в (271) выражение для $\vec{j}^{\text{своб}}$, получаемое из уравнений Максвелла (253): $\text{rot } \vec{H} = (4\pi/c)\vec{j}^{\text{своб}}$, откуда $\vec{j}^{\text{своб}} = (c/4\pi)\text{rot } \vec{H}$. Подстановка в (271) дает:

$$\Delta \mathcal{A}_{\text{в. с.}} = -(c\Delta t/4\pi) \int dx \vec{E} \text{rot } \vec{H}.$$

Подставив сюда $\vec{E} \text{rot } \vec{H} = \vec{E}_i \varepsilon_{ikl} \partial_k \vec{H}_l$ и перебросив производную ∂_k на множитель $\vec{E}$ интегрированием по частям, получим:

$$\Delta \mathcal{A}_{\text{в. с.}} = (c\Delta t/4\pi) \int dx \varepsilon_{ikl} \vec{H}_l \partial_k \vec{E}_i = -(c\Delta t/4\pi) \int dx \vec{H} \text{rot } \vec{E}.$$

Выразив здесь $\text{rot } \vec{E}$ через производную $\partial_t \vec{B}$ с помощью уравнения (269), получаем:

$$\Delta \mathcal{A}_{\text{в. с.}} = (\Delta t/4\pi) \int dx \vec{H} \partial_t \vec{B} = (1/4\pi) \int dx \vec{H} \Delta \vec{B}, \quad (272)$$

где $\Delta \vec{B} = \Delta t \partial_t \vec{B}$ — приращение $\vec{B}$ на малом интервале времени Δt (еще раз подчеркнем аналогию с вычислениями в п. 3.6 при обсуждении полной потенциальной энергии системы токов).

Выражение (272) — окончательный ответ для величины $\Delta \mathcal{A}_{\text{в. с.}}$ в магнитостатике. Для удобства читателя приведем в одном месте полученные выражения для работы внешних сил, необходимых для бесконечно малого изменения поля (первая формула — для диэлектриков, вторая — для магнетиков):

$$\Delta \mathcal{A}_{\text{в. с.}} = (1/4\pi) \int dx \vec{E} \Delta \vec{D}, \quad \Delta \mathcal{A}_{\text{в. с.}} = (1/4\pi) \int dx \vec{H} \Delta \vec{B}. \quad (273)$$

Это и есть искомые окончательные ответы.

Основные соотношения термодинамики диэлектриков и магнетиков. Плотность энергии поля для однородных и изотропных диэлектриков и магнетиков. Согласно первому началу термодинамики (262), при включении в число термодинамических переменных поля величины (273) добавляются в правую часть (262) и в соответствующие выражения (263), (265) для дифференциалов внутренней энергии U и свободной энергии F . Тогда в электростатике получаем:

$$dU = TdS - PdV + (1/4\pi) \int dx \vec{E} \Delta \vec{D}, \quad (274)$$

$$dF = -SdT - PdV + (1/4\pi) \int dx \vec{E} \Delta \vec{D}, \quad (275)$$

а в магнитостатике аналогично

$$dU = TdS - PdV + (1/4\pi) \int dx \vec{H} \Delta \vec{B}, \quad (276)$$

$$dF = -SdT - PdV + (1/4\pi) \int dx \vec{H} \Delta \vec{B}. \quad (277)$$

Для обозначения бесконечно малых приращений обычных переменных типа T , V мы используем обычный знак дифференциала dT , dV , а для приращения полевых переменных — символ “ Δ ”.

Из соотношений (274)–(277) следует, что пары $\vec{E}$, $\vec{D}$ в электростатике и $\vec{H}$, $\vec{B}$ в магнитостатике можно рассматривать как термодинамически сопряженные переменные, подобно парам S , T или P , V . Ясно также, что естественной переменной (см. определение в начале раздела) для U и F в электростатике является $\vec{D}$, а в магнитостатике — $\vec{B}$. Для термодинамических функций, рассматриваемых в естественных переменных, справедливы соотношения типа (266), к которым теперь добавляется еще одно подобное соотношение с вариационной производной по функциональному (полевому) аргументу. Например, для свободной энергии $F = F(T, V, \vec{D})$ в электростатике из (275) имеем:

$$\partial F / \partial T = -S, \quad \partial F / \partial V = -P, \quad \delta F / \delta \vec{D}_i(x) = \vec{E}_i(x) / 4\pi \quad (278)$$

(определение вариационных производных приводилось в п. 2.15 после формулы (106)).

Если мы хотим выполнить замену естественных переменных $\vec{D} \rightarrow \vec{E}$ в электростатике или $\vec{B} \rightarrow \vec{H}$ в магнитостатике, то нужно перейти к новым функциям:

$$\bar{U} = U - (1/4\pi) \int dx \vec{E} \vec{D}, \quad \bar{F} = F - (1/4\pi) \int dx \vec{E} \vec{D} \quad (279)$$

в электростатике и аналогично

$$\bar{U} = U - (1/4\pi) \int dx \vec{H} \vec{B}, \quad \bar{F} = F - (1/4\pi) \int dx \vec{H} \vec{B} \quad (280)$$

в магнитостатике. Тогда, например, для функции $\bar{F}$ в электростатике из (275) и (279) получим:

$$d\bar{F} = -SdT - PdV - (1/4\pi) \int dx \vec{D} \Delta \vec{E} \quad (281)$$

и аналогично для любых других подобных величин.

Все приведенные выше общие соотношения справедливы для любых диэлектриков и магнетиков, поскольку при их получении никакие предположения о связи $\vec{D}$ с $\vec{E}$ или $\vec{B}$ с $\vec{H}$ не использовались.

В дифференциальных соотношениях типа (274)–(277) вклады от вариаций поля и других переменных всегда входят аддитивно. Эти отдельные вклады не являются “полными дифференциалами”, поэтому из дифференциальных соотношений типа (274)–(277) в общем случае нельзя получить равенства типа: “энергия в поле” = “энергия без поля” + “вклад от поля”.

Но это можно сделать для однородных и изотропных диэлектриков и магнетиков, для которых $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu \vec{H}$ с не зависящими от координат x коэффициентами ϵ и μ . Зависимость этих величин от термодинамических переменных T и V допускается. [В дальнейшем мы будем использовать предположение об однородности среды, но отметим, что фактически оно несущественно и нужно лишь для упрощения записи формул. Для неоднородной среды с зависимостью от x в ϵ и μ все основные соотношения остаются справедливыми, различие лишь в том, что теперь ϵ и μ нельзя выносить из-под знака интегрирования по x .]

Рассмотрим в качестве примера определенную в (279) величину $\bar{F}$ в электростатике, рассматривая ее как функцию естественных переменных: $\bar{F} = \bar{F}(T, V, \vec{E})$. Из вида ее дифференциала (281) с учетом $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ имеем:

$$\partial \bar{F} / \partial T = -S, \quad \partial \bar{F} / \partial V = -P, \quad \delta \bar{F} / \delta \vec{E}_i(x) = -\epsilon \vec{E}_i(x) / 4\pi. \quad (282)$$

Рассмотрим теперь некоторые следствия равенства смешанных производных, в том числе и вариационных. Для пары переменных $T, \vec{E}$ с учетом соотношений (282) имеем:

$$\begin{aligned}(\partial/\partial T)(\delta/\delta \vec{E}_i(x))\bar{F} &= (\partial/\partial T)(-\varepsilon \vec{E}_i(x)/4\pi) = -(\partial\varepsilon/\partial T)\vec{E}_i(x)/4\pi, \\(\delta/\delta \vec{E}_i(x))(\partial/\partial T)\bar{F} &= (\delta/\delta \vec{E}_i(x))(-S) = -\delta S/\delta \vec{E}_i(x).\end{aligned}$$

Эти два выражения должны быть равны в силу равенства смешанных производных. Отсюда следует:

$$\delta S/\delta \vec{E}_i(x) = (\partial\varepsilon/\partial T)\vec{E}_i(x)/4\pi. \quad (283)$$

Дословно так же из равенства смешанных производных для пары $V, \vec{E}$ получим:

$$\delta P/\delta \vec{E}_i(x) = (\partial\varepsilon/\partial V)\vec{E}_i(x)/4\pi. \quad (284)$$

Соотношения (283), (284) показывают, что для системы с полем энтропия S и давление P зависят от поля $\vec{E}$. Нетрудно найти явный вид этой зависимости: поскольку вариационные производные (283), (284) зависят от $\vec{E}$ линейно, сам дифференцируемый объект (функционал) должен зависеть от $\vec{E}$ квадратично, а именно:

$$S(T, V, \vec{E}) = S(T, V, 0) + (\partial\varepsilon/\partial T) \int dx \vec{E}^2/8\pi, \quad (285)$$

$$P(T, V, \vec{E}) = P(T, V, 0) + (\partial\varepsilon/\partial V) \int dx \vec{E}^2/8\pi. \quad (286)$$

Легко проверить, что вариационные производные этих величин по $\vec{E}$ совпадают с выражениями (283), (284). Первые слагаемые в (285), (286) — энтропия и давление для системы без поля, вторые — добавки от поля.

Подставим теперь величины (285), (286) в выражение (281) для $d\bar{F}$, в последнем слагаемом которого сделаем подстановку $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$. Это дает:

$$d\bar{F} = d\bar{F}\Big|_{\vec{E}=0} - [(\partial\varepsilon/\partial T)dT + (\partial\varepsilon/\partial V)dV] \int dx \vec{E}^2/8\pi - \varepsilon \int dx \vec{E} \Delta \vec{E}/4\pi. \quad (287)$$

Первое слагаемое в правой части — величина $d\bar{F}$ при отсутствии поля (тогда $\bar{F}$ и F совпадают согласно (279)), все прочие вклады — добавки от поля в энтропию и давление плюс последнее слагаемое (281) с $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$. Все

вклады с $\vec{E}$ в (287) собираются в “полный дифференциал” в независимых переменных $T, V, \vec{E}$ (при этом $d\vec{E}$ пужно понимать как $\Delta\vec{E}$):

$$d\bar{F} = d\bar{F}\Big|_{\vec{E}=0} - d\left[\varepsilon \int dx \vec{E}^2/8\pi\right]. \quad (288)$$

Соотношение (288) можно проинтегрировать, что дает:

$$\bar{F} = F\Big|_{\vec{E}=0} - \varepsilon \int dx \vec{E}^2/8\pi. \quad (289)$$

В первом слагаемом мы заменили $\bar{F}$ на F , так как без поля эти величины совпадают.

Из (279) и (289) с учетом $\bar{D} = \varepsilon \vec{E}$ получаем аналогичное (289) соотношение для свободной энергии F :

$$F = F\Big|_{\vec{E}=0} + \varepsilon \int dx \vec{E}^2/8\pi. \quad (290)$$

Таким образом, для однородного и изотропного диэлектрика свободная энергия F представляется в виде суммы той же величины без поля и известной из (290) квадратичной по $\vec{E}$ добавки от поля.

Для внутренней энергии U формулы выглядят сложнее: из (264) имеем $U = F + TS$, куда нужно подставить выражение (290) для свободной энергии и выражение (285) для энтропии, что дает

$$U = U\Big|_{\vec{E}=0} + [\varepsilon + T(\partial\varepsilon/\partial T)] \int dx \vec{E}^2/8\pi. \quad (291)$$

Все сказанное выше переносится дословно на однородные и изотропные “диа” и “пара” (но не “ферро”) магнетики, для которых $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Все нужные формулы для магнетиков получаются из соответствующих формул для диэлектриков простой заменой $\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \varepsilon \rightarrow \mu$. В частности, аналогичное (290) выражение для свободной энергии однородного и изотропного магнетика имеет вид

$$F = F\Big|_{\vec{H}=0} + \mu \int dx \vec{H}^2/8\pi, \quad (292)$$

аналогом (291) для внутренней энергии является соотношение

$$U = U\Big|_{\vec{H}=0} + [\mu + T(\partial\mu/\partial T)] \int dx \vec{H}^2/8\pi. \quad (293)$$

Плотность энергии поля W в вакууме определялась соотношением (129): $W = (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)/8\pi$. В среде величину W обычно определяют по соответствующим вкладам (290), (292) в свободную энергию, что дает

$$W = \varepsilon \vec{E}^2/8\pi = \vec{E} \vec{D}/8\pi \quad (294)$$

для плотности энергии поля в однородном и изотропном диэлектрике и

$$W = \mu \vec{H}^2/8\pi = \vec{H} \vec{B}/8\pi \quad (295)$$

для магнетика. Эти определения естественны для изотермических процессов, что обычно и предполагается в задачах электродинамики (например, при определении плотности потока энергии в среде). Величины ε и μ в таких задачах, как правило, считаются не зависящими ни от каких параметров константами. Для адиабатических процессов плотность энергии поля следовало бы, конечно, определять из соотношений (291), (293) для внутренней энергии, содержащих добавки с $\partial\varepsilon/\partial T$ для диэлектриков и с $\partial\mu/\partial T$ для магнетиков (которые исчезают, если считать ε и μ не зависящими ни от каких параметров константами). Но обычно, как уже говорилось, в задачах электродинамики процессы считают изотермическими и для плотности энергии поля в однородной и изотропной среде используют выражения (294), (295).

Пример конкретной задачи. Рассмотрим следующую конкретную задачу: пусть есть большой сосуд, в котором находится жидкий диэлектрик, например, трансформаторное масло. В этот сосуд вставлены вертикально две параллельные металлические пластины (см. рис. 3.3), на которые от внешнего источника подается некоторое фиксированное напряжение (разность потенциалов) V . Из опыта известно, что при включении напряжения диэлектрик между пластинами конденсатора вытягивается вверх на некоторую высоту h . Задача состоит в том, чтобы найти эту высоту, пользуясь полученными ранее термодинамическими соотношениями. При этом вся геометрия считается заданной, диэлектрическая проницаемость ε считается не зависящей ни от каких параметров константой, а сам сосуд достаточно большим, чтобы изменением в нем уровня жидкости при ее вытягивании между пластинами можно было пренебречь. Система находится при некоторой фиксированной внешней температуре, все процессы считаем изотермическими, т. е. возможными эффектами типа разогрева или охлаждения диэлектрика при его вытягивании между пластинами пренебрегаем, как и возможными эффектами изменения давления.

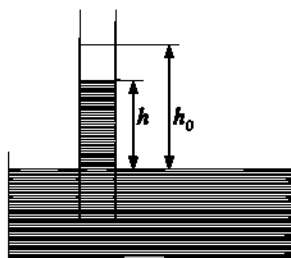


Рис. 3.3. Схема опыта. Здесь h — высота втягиваемого масла, h_0 — высота конденсатора над уровнем масла

Ясно, что основная “игра” в нашей задаче идет между потенциальной энергией жидкости в поле тяжести и вкладом электрического поля в какую-то из термодинамических функций типа энергии. Вопрос: в какую именно? Для получения ответа нужно воспользоваться сформулированным в начале раздела общим принципом: нужно использовать ту термодинамическую функцию, естественные переменные которой закреплены по условиям поставленной задачи. В нашем случае речь идет о паре переменных $\vec{D}$, $\vec{E}$, и нам нужно понять, какая из них закреплена в процессе изменения высоты столба жидкости h . Ясно, что в нашей задаче закреплённой переменной является $\vec{E}$: если фиксированы разность потенциалов V между пластинами и расстояние d между ними, то в силу соотношения $\vec{E}_i = -\partial_i \varphi$ имеем $|\vec{E}| = V/d$ независимо от того, имеется между пластинами диэлектрик или нет.

Таким образом, у нас закреплена переменная $\vec{E}$. Поэтому в качестве термодинамической составляющей энергии нужно использовать, согласно общему принципу, определению в (279) величину $\bar{F}$, для которой $\vec{E}$ является естественной переменной. Явное выражение для этой величины для однородного и изотропного диэлектрика известно из (289).

Конкретные вычисления удобно производить для “единичного столба”, т. е. вертикального столба с единичной площадью поперечного сечения, мысленно выделенного между пластинами. Потенциальная энергия в поле тяжести такого столба жидкости с высотой h есть произведение веса этого столба ρgh (ρ — массовая плотность среды, g — ускорение свободного падения) и высоты центра тяжести столба $h/2$, т. е.

$$U_{\text{тяж}} = \rho gh^2/2. \quad (296)$$

Рассмотрим теперь вклад электрического поля $-\varepsilon \int dx \vec{E}^2/8\pi$ в (289) для этого “единичного столба”. Поле $\vec{E}$ между пластинами однородное (краевыми эффектами пренебрегаем, формально можно считать пластины продолжающимися вверх до бесконечности) и направлено перпендикулярно к ним, $|\vec{E}| = V/d$. Поэтому в интересующем нас интеграле $\varepsilon \int dx \vec{E}^2/8\pi$ подынтегральное выражение не зависит от x , так что интеграл для единичного столба равен произведению подынтегрального выражения на высоту столба. Если интегрировать по высоте от нуля (уровень жидкости в сосуде) до бесконечности, то интеграл будет расходящимся. Но нас интересует не сам интеграл, а лишь та его часть, которая зависит от высоты подъема жидкости h . Для ее вычисления введем произвольно некоторую фиксированную граничную высоту $h_0 > h$ и будем вычислять интеграл в интервале от 0 до h_0 по высоте — все прочие вклады не зависят от h . Тогда в интервале от 0 до h мы имеем диэлектрик с заданным значением ε , а в интервале от h до h_0 — вакуум, для которого $\varepsilon = 1$. Поэтому для нашего столба

$$\varepsilon \int dx \vec{E}^2/8\pi = \varepsilon E^2 h/8\pi + E^2(h_0 - h)/8\pi, \quad (297)$$

где $E = V/d$. Первое слагаемое в (297) — вклад от заполненной диэлектриком части столба в интервале по высоте от 0 до h , второе — от “пустой” части столба в интервале от h до h_0 . Величина (297) входит в выражение (289) для $\bar{F}$ с обратным знаком, т. е. (где const — несущественные вклады, не зависящие от h)

$$\bar{F} = -(\varepsilon - 1)E^2 h/8\pi + \text{const}. \quad (298)$$

Минимизируемой величиной является сумма выражений (296) и (298). Из условия $d[U_{\text{тяж}} + \bar{F}]/dh = 0$ с $U_{\text{тяж}}$ из (296) и $\bar{F}$ из (298) получаем $\rho g h = (\varepsilon - 1)E^2/8\pi$, откуда

$$h = (\varepsilon - 1)E^2/8\pi \rho g, \quad (299)$$

где $E = V/d$. Соотношение (299) — решение поставленной задачи. Поскольку $\varepsilon > 1$, величина h положительна, т. е. диэлектрик действительно вытягивается вверх.

Для рассмотренной задачи в паре $\vec{D}$, $\vec{E}$ по условиям была закреплена переменная $\vec{E}$. Можно поставить вопрос: как сформулировать задачу, чтобы закреплённой была переменная $\vec{D}$, а не $\vec{E}$?

Это не простой вопрос, и он нуждается в обсуждении. Согласно уравнениям (250) индукция $\vec{D}$ определяется свободными зарядами, которые и нужно “закрепить” для закрепления $\vec{D}$. Конкретная модель — σ -конденсатор — две параллельные непроводящие пластины, равномерно “обмазанные” поверхностным свободным зарядом $\pm\sigma^{\text{своб}}$. Если такой конденсатор пустой или же целиком заполнен диэлектриком, то поле $\vec{D}$ “простое” — вне конденсатора поля нет, а внутри оно однородное и перпендикулярно пластинам с одинаковым значением $D = 4\pi\sigma^{\text{своб}}$ как для пустого конденсатора, так и для заполненного диэлектриком.

Но если такой σ -конденсатор заполнен диэлектриком лишь частично, то картина усложняется и существенно зависит от способа заполнения. Если оно такое, как показано на рис. 3.3, то поле внутри конденсатора уже не может быть простым (т. е. однородным и перпендикулярным к пластинам), так как это нарушило бы условие непрерывности потенциала на границе раздела диэлектрик — вакуум из-за скачка $\vec{E}_t$ на границе при $\vec{D} = \text{const}$. Таким образом, конфигурация поля между пластинами должна быть нетривиальной, кроме того, в этом случае поле будет отличным от нуля и вне конденсатора.

Ясно, что в такой ситуации о выполнении условия $\vec{D} = \text{const}$ при втягивании жидкого диэлектрика по вертикали (как на рисунке) не может быть и речи. Поэтому изложения выше для металлического конденсатора простая техника расчета высоты подъема h из энергетических соображений для σ -конденсатора с той же геометрией непригодна. Такую задачу можно решать, видимо, только путем точного расчета полей с последующим использованием условий силового равновесия для каждого элемента среды, — все это очень сложные задачи.

Но есть другой вариант частичного заполнения, при котором поле остается “простым” и условие $\vec{D} = \text{const}$ при втягивании жидкого диэлектрика выполняется. Представим себе, что такой σ -конденсатор поставлен не вертикально, как на рисунке, а положен горизонтально на поверхность жидкого диэлектрика. Допустим, что соприкасающаяся с поверхностью диэлектрика пластина конденсатора проницаема (т. е. “пористая” или “сеточка” с мелкими ячейками), так что диэлектрик может всасываться внутрь конденсатора. Теперь допустим, что конденсатор “втянул” диэлектрик на некоторую высоту $h < d$, где d — расстояние между пластинами конденсатора (отметим, что величина $D = 4\pi\sigma^{\text{своб}}$ от расстояния d между пластинами не зависит). Тогда диэлектрик внутри конденсатора образует слой с высотой h , граница которого с вакуумом параллельна пластинам. В этом

случае поле остается простым (т. е. вне конденсатора поля нет, а внутри оно однородное и перпендикулярно пластинам) и условие $\vec{D} = \text{const}$ внутри конденсатора при изменении высоты подъема диэлектрика h выполняется. Поэтому для вычисления величины h мы можем пользоваться простыми соображениями “минимума энергии” как и для металлического конденсатора, только теперь вместо термодинамической функции $\bar{F}$ (289) нужно использовать свободную энергию F (290), для которой закреплённая при изменении h в данной задаче величина $\vec{D}$ является естественной переменной. Высота подъема h определяется из условия минимума суммы потенциальной энергии жидкости в поле тяжести (296) (все в расчете на “единичный столб”) и свободной энергии F (290). Для единичного столба зависящая от h часть F при $D = \varepsilon E = \text{const}$ имеет вид $F = D^2 h (\varepsilon^{-1} - 1) / 8\pi$. Из условия $d[U_{\text{тяж}} + F] / dh = 0$ с $U_{\text{тяж}}$ из (296) получаем (где $D = 4\pi\sigma^{\text{своб}}$ — заданная константа)

$$h = D^2 (\varepsilon - 1) / 8\pi \rho g \varepsilon > 0.$$

Это и есть решение поставленной задачи.

Для уточнения ее постановки следовало бы дополнительно указать, что 1) сам конденсатор должен быть достаточно большим (чтобы было можно пренебрегать краевыми эффектами), 2) что сосуд с диэлектриком должен быть еще много больше (чтобы было можно пренебрегать понижением в нем уровня жидкости при ее втягивании в конденсатор), 3) что сам конденсатор должен быть как-то закреплён по высоте на уровне поверхности жидкости и 4) он должен быть как-то герметизирован по бокам для устранения утечки наружу втянутой жидкости. Все это уже детали, которые читатель может обдумать самостоятельно.

Приведенный выше анализ задачи с σ -конденсатором инициировал моим коллегой С. Н. Манидой, указавшим на нетривиальность этой задачи.

Объемные силы в однородных и изотропных диэлектриках и магнетиках. Любой бесконечно малый элемент среды (диэлектрика или магнетика) можно рассматривать как бесконечно малый (= точечный) диполь, на который действует полное поле, т. е. внешнее поле при его наличии плюс поле, создаваемое самой системой. Выражение для силы, действующей на точечный диполь в произвольном поле, известно из соотношений (221), которые и являются основой при вычислении объемных сил в диэлектриках и магнетиках.

Диэлектрики. Электрический дипольный момент бесконечно малого элемента среды с объемом dx вокруг точки x есть, по определению, $\vec{P}(x)dx$,

где $\vec{P}$ — вектор поляризации среды. Подставляя в первое соотношение (221) в качестве дипольного момента $\vec{d}$ величину $\vec{P}(x)dx$ и сохраняя обозначение $\vec{E}$ для полного поля, получаем (аргументы x у всех величин опускаем):

$$d\vec{F}_i = dx\vec{P}_k\partial_i\vec{E}_k \equiv dx\vec{f}_i, \quad (300)$$

где введено обозначение $\vec{f}$ для объемной плотности силы. Из соотношения (300) имеем $\vec{f}_i = \vec{P}_k\partial_i\vec{E}_k$, где $\vec{P}_k = \alpha\vec{E}_k$ согласно (251). Отсюда следует $\vec{f}_i = \alpha\vec{E}_k\partial_i\vec{E}_k = \alpha\partial_i E^2/2$. Выразив здесь поляризуемость α через диэлектрическую проницаемость ϵ согласно (251), получаем следующее окончательное выражение для объемной плотности силы, действующей на элементы среды в однородном и изотропном диэлектрике:

$$\vec{f} = [(\epsilon - 1)/8\pi]\vec{\nabla}E^2. \quad (301)$$

Магнетики. Базовой формулой для магнетиков является второе соотношение (221), роль магнитного момента $\vec{m}$ для бесконечно малого элемента среды играет величина $\vec{M}(x)dx$, а роль $\vec{H}$ — полное поле $\vec{B}$. Аналогом (300) является соотношение

$$d\vec{F}_i = dx\vec{M}_k\partial_i\vec{B}_k \equiv dx\vec{f}_i. \quad (302)$$

Отсюда с учетом соотношений (254) для объемной плотности силы $\vec{f}$ в однородных и изотропных “диа” и “пара” магнетиках получаем следующее выражение:

$$\vec{f} = [(\mu - 1)/8\pi\mu]\vec{\nabla}B^2. \quad (303)$$

Из соотношения (301) с учетом $\epsilon > 1$ следует, что диэлектрик всегда втягивается в направлении роста градиента $\vec{\nabla}E^2$, т. е. “в область сильного поля”. То же будет и для парамагнетиков, для которых в (303) $\mu > 1$. Для диамагнетиков, у которых $\mu < 1$, эффект обратный — диамагнетик выталкивается из области сильного поля. Соотношение (301) объясняет, например, такой общеизвестный факт: если расчесать сухие волосы пластмассовой расческой и затем поднести ее к небольшому кусочку бумаги, то он притянется к расческе. Объяснение: из-за трения при расчесывании волос расческа приобретает электрический заряд, следовательно, создает поле, величина которого убывает при удалении от его источника (расчески). Кусочек бумаги — диэлектрик, который согласно соотношению (301) втягивается в область сильного поля, т. е. по направлению к расческе.

3.10 Краевые задачи электростатики и методы их решения

Для простоты мы будем ограничиваться случаем однородных и изотропных диэлектриков с не зависящей ни от каких параметров диэлектрической проницаемостью ε , никаких разговоров о термодинамике больше не будет. Для более сложных задач с неоднородным или неизотропным диэлектриком любую конкретную задачу нужно рассматривать индивидуально, но для данного краткого курса это является “непозволительной роскошью”. Наша цель — изложить на простейшем примере общие принципы решения подобных задач, анализ усложненных вариантов предоставляем заинтересованному читателю.

Основные уравнения, переход к потенциалам. Уравнения электростатики диэлектриков (250) известны: $\text{rot } \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho^{\text{своб}}$. Потенциал φ вводится соотношением (255): $\vec{E}_i = -\partial_i\varphi$.

Утверждение: для однородного и изотропного диэлектрика объемные плотности свободных, связанных и полных зарядов взаимно пропорциональны, поэтому равенство $\rho^{\text{своб}} = 0$ влечет $\rho^{\text{связ}} = 0$ и $\rho^{\text{полн}} = 0$. Действительно, из (249) и (250) имеем $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho^{\text{полн}}$ и $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho^{\text{своб}}$, откуда с учетом $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ получаем

$$\rho^{\text{своб}} = \varepsilon\rho^{\text{полн}} = \varepsilon(\rho^{\text{своб}} + \rho^{\text{связ}}). \quad (304)$$

Подставив $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ в уравнение $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho^{\text{полн}}$ с учетом первого соотношения (304), получим уравнение Пуассона для потенциала φ в среде:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho^{\text{своб}}/\varepsilon. \quad (305)$$

Там, где нет свободных зарядов, потенциал φ является гармонической функцией.

Для полей в вакууме решение уравнения Пуассона (175) выражалось соотношением (176). Если нет границ и все пространство заполнено диэлектриком одного сорта с заданным значением ε , то решение уравнения (305) получается простой заменой $\rho \rightarrow \rho^{\text{своб}}$ в (176) и делением на ε :

$$\varphi(x) = \varepsilon^{-1} \int dy \rho^{\text{своб}}(y)/|x - y|. \quad (306)$$

В частности, для свободного точечного заряда Q , помещенного в такую среду, имеем $\varphi = Q/\varepsilon r$, в вакууме $\varepsilon = 1$.

Постановка задач. Если все пространство заполнено диэлектриком одного сорта с заданным значением ϵ , то никаких проблем нет: решение для заданных свободных зарядов дается соотношением (306). Нетривиальны задачи, в которых есть границы раздела между диэлектриками с разными значениями ϵ (вакуум — частный случай $\epsilon = 1$), а также, возможно, еще и металлические тела. Условия сшивания на границе раздела двух диэлектриков известны из (259), а на границе диэлектрика с металлом — из (260). Обычно задачи решаются в терминах потенциала φ , который удовлетворяет уравнению Пуассона (305) в каждой из областей с фиксированным значением ϵ . По известному потенциалу затем можно найти величины $\vec{E}_i = -\partial_i \varphi$, $\vec{D}_i = \epsilon \vec{E}_i$. Поле порождается свободными зарядами, которые считаются заданными. Создаваемый “самой системой” потенциал φ всегда будем считать исчезающим на бесконечности, чем устраняется общий калибровочный произвол $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$ при учете добавочного требования непрерывности потенциала на всех границах раздела.

Помимо поля, создаваемого самой системой, в задаче может участвовать еще и некоторое заданное внешнее поле. По определению, “внешним” можно называть любое поле, не имеющее источников, поэтому его потенциал $\varphi^{\text{вн}}$ должен быть гармонической функцией: $\Delta \varphi^{\text{вн}} = 0$. Гармонические функции, как известно, не убывают на бесконечности. Поэтому задание конкретного внешнего поля эквивалентно заданию асимптотики на бесконечности для полного потенциала φ : поскольку вклад в φ “самой системы” считается исчезающим на бесконечности, все то, что остается, — внешнее поле.

Типичный пример внешнего поля — однородное электрическое поле $\vec{E} = \text{const}$. Если направить ось “3” по направлению поля $\vec{E}$, то соответствующий такому внешнему полю потенциал будет иметь вид

$$\varphi^{\text{вн}}(x) = -Ex_3, \quad \text{где } E \equiv |\vec{E}|. \quad (307)$$

Если есть только внешнее поле и нет никаких свободных зарядов, то потенциал φ во всех областях — гармоническая функция ($\Delta \varphi = 0$) с заданной (внешним полем) асимптотикой на бесконечности и с заданными условиями сшивания на всех границах раздела. К задаче того же типа можно перейти и в общем случае при наличии свободных зарядов. Допустим, что у нас есть несколько областей с разными диэлектриками, нумеруемых индексом $i = 1, 2, \dots$. Пусть в каждой из этих областей “ i ” находятся некоторые свободные заряды с заданной плотностью $\rho_i^{\text{своб}}$ (часть из них может

быть равной нулю), потенциал φ в каждой из этих областей обозначим через φ_i . Этот потенциал в каждой области должен удовлетворять уравнению Пуассона (305) со своими для каждой области значениями $\rho_i^{\text{своб}}$ и ε_i . Точно такому же уравнению удовлетворяют потенциалы $\bar{\varphi}_i$, которые порождаются теми же свободными зарядами $\rho_i^{\text{своб}}$ во всем пространстве, заполненном диэлектриком с данным ε_i . Отсюда следует, что разности $\psi_i = \varphi_i - \bar{\varphi}_i$ являются гармоническими функциями: $\Delta\psi_i = 0$. Потенциалы $\bar{\varphi}_i$ можно считать известными из (306), поэтому задача вычисления точных потенциалов φ_i эквивалентна задаче вычисления гармонических функций ψ_i в каждой из областей. При известных $\bar{\varphi}_i$ условия сшивания для потенциалов φ_i на границах раздела нетрудно переформулировать в виде соответствующих условий сшивания для гармонических функций ψ_i .

Таким образом, задача всегда сводится к вычислению гармонической в каждой из областей функции с заданной асимптотикой на бесконечности и с заданными условиями сшивания на всех границах раздела. Из математики известно, что такая задача при разумном поведении источников всегда имеет решение и что это решение единственно. С точки зрения физики здесь вообще нет проблемы: ясно, что заданные источники порождают некоторое поле (т. е. решение существует), и что это поле при устраненном калибровочном произволе определяется по источникам однозначно (т. е. решение единственно).

Эта простая идея существования и единственности решения лежит в основе одного из методов решения таких задач, — “угадыванию ответа”. Его суть в следующем: если мы каким-то образом “угадали ответ”, т. е. предъявили выражение для потенциала φ , удовлетворяющее уравнению Пуассона (305) и всем нужным асимптотическим и краевым условиям, то этот ответ и есть искомое решение задачи в силу его единственности. Никаких дополнительных проверок при этом не требуется.

Переходим теперь к изложению на конкретных примерах некоторых методов решения рассматриваемых задач.

Метод изображений (или “отражений”). Это типичный метод “угадывания ответа”, ниже рассматриваются примеры, все в вакууме.

Заземленная металлическая плоскость. Пусть над заземленной (т. е. имеющей нулевой потенциал) бесконечной металлической плоскостью находится заданный точечный заряд e (см. рис. 3.4).

Задача — найти потенциал φ . Ясно, что в нижнем полупространстве $\varphi = 0$, поэтому нетривиально лишь решение в верхнем полупространстве, где находится “реальный” заряд e . Его получают “методом изображений”,

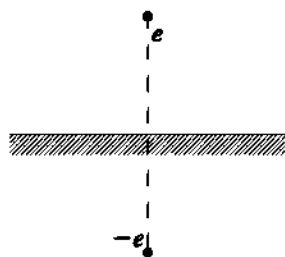


Рис. 3.4. Отражение заряда от заземленной плоскости

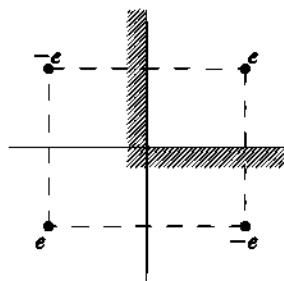


Рис. 3.5. Отраженные заряды от заземленного прямого угла

а именно: зеркально симметрично реальному заряду $e \equiv e_1$ под плоскостью помещают “отраженный заряд” $-e \equiv e_2$ и утверждают, что искомый потенциал φ в верхнем полупространстве есть сумма $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ обычных потенциалов типа Q/r этих двух точечных зарядов. Доказательство: поскольку φ_1 есть обычный потенциал реального заряда для задачи без границ (т. е. в пустом пространстве без металлической плоскости), он удовлетворяет автоматически нужному уравнению Пуассона. Такому же уравнению в верхнем полупространстве должен удовлетворять и точный потенциал φ , что и выполняется для $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, поскольку потенциал точечного отраженного заряда φ_2 гармоничен всюду, кроме точки его расположения, в частности, в верхнем полупространстве.

Таким образом, нужное уравнение Пуассона для потенциала $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ в верхнем полупространстве заведомо выполняется и остается лишь проверить выполнение краевого условия $\varphi = 0$ на металлической плоскости. Оно также, очевидно, выполняется, поскольку ввиду симметричности конфигурации зарядов вклады φ_1 и φ_2 на плоскости взаимно сокращаются. В силу единственности решения выражение $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ — искомый потенциал в верхнем полупространстве, в нижнем $\varphi = 0$.

Зная потенциал, с помощью условия спивания $\Delta \vec{E}_n = 4\pi\sigma$ можно найти плотность поверхностного заряда σ на металлической плоскости. По доказанному выше, потенциал отраженного точечного заряда $-e$ эквивалентен потенциалу, который реально создается притекающим из бесконечности поверхностным зарядом на металлической плоскости.

“Угол” с заземленными металлическими стенками. Рассмотрим прямой угол $\pi/2$ (первый квадрант на рис. 3.5) с условием $\varphi = 0$ на его металлических границах. Задача считается трехмерной, т. е. на рис. 3.5 приведено поперечное сечение стенок угла, которые в ортогональном плоскости рисунка направлении считаются простирающимися до бесконечности. Внутри этой “реальной области” (первый квадрант) находится некоторый “реальный” заряд $e \equiv e_1$. Построив всевозможные его отражения от двух плоскостей, получим показанную на рис. 3.5 симметричную систему из четырех зарядов, один из которых есть реальный заряд $e \equiv e_1$, а три других заряда $\pm e$ — его отражения $e_{2,3,4}$. Утверждается, что в “реальной области” (первый квадрант) искомый потенциал есть сумма $\varphi = \sum \varphi_i$ потенциалов типа Q/r от всех четырех зарядов, а вне реальной области $\varphi = 0$. Доказательство точно такое же, как для рассмотренного выше случая металлической плоскости: нужное уравнение Пуассона для φ выполняется потому, что все отраженные заряды находятся вне реальной области и их потенциалы в ней являются гармоническими функциями, а условие $\varphi = 0$ на стенках обеспечивается попарным взаимным сокращением вкладов из-за симметричности конфигурации зарядов.

Если попробовать проделать подобную процедуру для угла в 120 градусов ($2\pi/3$), то сразу убедимся, что получить решение таким способом нельзя: полная симметричная конфигурация зарядов состоит из одного “реального” и пяти “отраженных”, и одно из этих пяти отражений обязательно попадает в реальную область, что запрещено, поскольку при этом нарушается нужное уравнение Пуассона для потенциала φ .

Обобщая эти наблюдения, можно сказать, что получить решение таким методом можно только для углов π/n с $n = 1, 2, \dots$. Предлагаем читателю доказать это самостоятельно.

Заземленная металлическая сфера. Пусть есть заземленная (т. е. имеющая нулевой потенциал) металлическая сфера радиуса R , вне которой на заданном расстоянии $R_1 > R$ от центра сферы находится заданный заряд e_1 . Требуется найти потенциал φ внутри и вне сферы. Ясно, что внутри сферы $\varphi = 0$, поэтому нетривиален только потенциал φ вне сферы. Его можно найти с помощью метода изображений. Для этого нужно поместить внутри сферы на одном луче с e_1 некоторый “отраженный” заряд e_2 на некотором расстоянии R_2 от центра сферы (см. рис. 3.6). Решение вне сферы — сумма потенциалов $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ типа Q/r для этих двух точечных зарядов. Поскольку отраженный заряд находится вне “реальной области”, нужное уравнение Пуассона для потенциала φ заведомо выполняется,

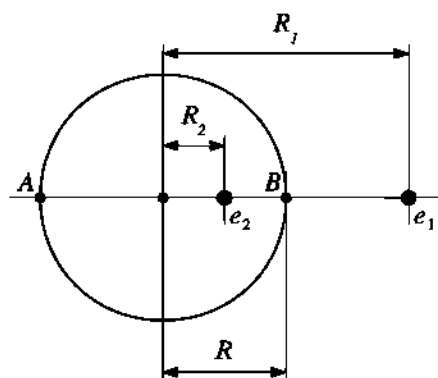


Рис. 3.6. Отраженный заряд от заземленной сферы

остается лишь удовлетворить краевому условию $\varphi = 0$ на поверхности сферы. Утверждается, что параметры e_2 и R_2 можно выбрать так, чтобы получить $\varphi = 0$ на сфере. Найти эти два параметра e_2 и R_2 нетрудно из двух уравнений $\varphi_A = 0$ и $\varphi_B = 0$ для двух показанных на рис. 3.6 точек A и B на поверхности сферы. Имеем: $0 = \varphi_A = e_1/(R_1 - R) + e_2/(R - R_2)$ и $0 = \varphi_B = e_1/(R_1 + R) + e_2/(R + R_2)$. Здесь величины R , R_1 , e_1 считаются заданными, R_2 и e_2 ищутся. Решение приведенных двух уравнений имеет следующий вид:

$$e_2 = -e_1 R/R_1, \quad R_2 = R^2/R_1. \quad (308)$$

Утверждение: при таком выборе параметров для отраженного заряда потенциал $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ равен нулю не только в точках A и B , но и на всей поверхности сферы. Предлагаем читателю доказать это самостоятельно.

Зная потенциал, из условия сшивания $\Delta \vec{E}_n = 4\pi\sigma$ можно найти поверхностный заряд σ на сфере. Полный заряд системы Q определяется вкладом $\propto 1/r$ в асимптотике потенциала на больших расстояниях $r \gg R$ согласно общей формуле мультипольного разложения (195). В нашем случае для $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ на больших расстояниях имеем $\varphi = (e_1 + e_2)/r$, откуда следует $Q = e_1 + e_2$. Поскольку e_1 — реальный заряд, добавка $e_2 = Q_{\text{сф}}$ — полный заряд самой металлической сферы. На вопрос: “а откуда он берется?” ответ такой: “заземленность” означает, что сферу следует считать соединенной, например, тонким проводом с некоторым “резервуаром” (условно, “с землей”), имеющим нулевой потенциал. Это соединение обеспечивает равенство нулю потенциала на сфере именно из-за возможности перетекания зарядов из резервуара на сферу, отсюда и берется ее заряд.

Мы рассматривали “внешнюю задачу”, в которой реальный заряд e_1 находится вне сферы. Можно рассмотреть и “внутреннюю задачу”, в которой заряды e_1 и e_2 меняются местами: реальным является заряд e_2 внутри сферы, а e_1 — его отражением. Тогда решение внутри сферы имеет вид $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, а вне сферы $\varphi = 0$. Отсюда следует, что в этом случае полный заряд системы Q равен нулю, а $Q_{\text{сф}} = -e_2$ для компенсации реального заряда e_2 .

Металлическая сфера с заданным потенциалом $V \neq 0$. В этом случае для внешней задачи с реальным зарядом e_1 вне сферы внутри нее будет $\varphi = V$, а вне сферы к обычному решению $\varphi_1 + \varphi_2$ теперь следует добавить гармоническую вне сферы функцию VR/r , где R — радиус сферы, r — расстояние до ее центра от точки наблюдения. Такая добавка ввиду ее гармоничности не нарушает уравнение Пуассона для потенциала вне сферы и обеспечивает нужное значение $\varphi = V$ для потенциала на сфере, т. е. при $r = R$. По асимптотике потенциала при $r \rightarrow \infty$ находим полный заряд системы $Q = e_1 + e_2 + VR$, где e_1 — реальный заряд, а $e_2 + VR = Q_{\text{сф}}$ — заряд самой сферы.

Для внутренней задачи, когда реальным считается заряд e_2 внутри сферы, а e_1 — его отражением, внутри сферы к обычному решению $\varphi_1 + \varphi_2$ просто добавляется константа V , а вне сферы $\varphi = VR/r$. Тогда полный заряд системы есть $Q = VR$, заряд сферы есть $Q_{\text{сф}} = VR - e_2$, где e_2 — реальный заряд.

Металлическая сфера с заданным зарядом. Эта задача сводится к предыдущей, но теперь нужно считать заданным заряд сферы $Q_{\text{сф}}$, а не ее потенциал V . Эти величины однозначно связаны: для внешней задачи имеем (см. выше) $Q_{\text{сф}} = e_2 + VR$, откуда $V = (Q_{\text{сф}} - e_2)/R$. Подставив это значение в известные (см. выше) выражения для задачи с заданным потенциалом, внутри сферы получаем $\varphi = V = (Q_{\text{сф}} - e_2)/R = \text{const}$, а вне сферы $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + VR/r = \varphi_1 + \varphi_2 + (Q_{\text{сф}} - e_2)/r$, полный заряд системы есть $Q = e_1 + Q_{\text{сф}}$.

Для внутренней задачи с реальным зарядом e_2 внутри сферы имеем $Q_{\text{сф}} = VR - e_2$ (см. выше), откуда $V = (Q_{\text{сф}} + e_2)/R$. Эта константа просто добавляется к обычному решению $\varphi_1 + \varphi_2$ внутри сферы, а вне ее теперь будет $\varphi = (Q_{\text{сф}} + e_2)/r$, полный заряд системы есть $Q = Q_{\text{сф}} + e_2$.

На этом мы заканчиваем обсуждение метода изображений и переходим к описанию других приемов решения наших краевых задач. В заключение добавим, что в книге Джексона [1] в параграфе 5 главы 4 приводится решение методом изображений задачи с двумя заполненными разными

диэлектриками полупространствами, в одном из которых помещен заданный свободный заряд.

Метод разделения переменных для оператора Лапласа. Ранее было показано, что все наши задачи можно свести к вычислению в каждой из разделенных границами областей с разными диэлектриками некоторой гармонической функции ψ , т. е. решения уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$. В обычных декартовых координатах $\Delta = \partial_i \partial_i$ — сумма вторых производных по всем координатам x_i . Задачу можно рассматривать не только в декартовых, но и в иных системах координат: сферических, цилиндрических, эллиптических и т. п. Для каждой из таких систем вместо трех декартовых координат x_i , $i = 1, 2, 3$ вводятся три другие переменные ξ_i , $i = 1, 2, 3$. Например, в сферической системе трехмерный вектор $\vec{x}$ заменяется набором трех переменных $\xi = \{r, \theta, \varphi\}$, где $r = |\vec{x}|$, θ — угол между вектором $\vec{x}$ и осью “3”, а φ — угол между проекцией вектора $\vec{x}$ на плоскость “1, 2” и осью “1”. Замена переменных от декартовых координат к сферическим выглядит следующим образом:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad (309)$$

а интеграл по трехмерному пространству в сферических координатах принимает вид (где многоточие — любое подынтегральное выражение):

$$\int dx... \equiv \int d^3x... = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi... \quad (310)$$

Аналогичные формулы можно написать и для любых других систем координат. Приведем лишь еще один важный конкретный пример цилиндрической системы координат, в которой $\xi = \{z, \rho, \varphi\}$, где $z = x_3$, а ρ и φ — полярные координаты в ортогональной оси “3” плоскости “1, 2”. $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, а φ — угол между осью “1” и проекцией вектора $\vec{x}$ на плоскость “1, 2”. Тогда вместо (309) имеем:

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad x_3 = z, \quad (311)$$

а вместо (310) теперь будет

$$\int dx... \equiv \int d^3x... = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi... \quad (312)$$

Для каждой из таких систем оператор Лапласа Δ можно переписать в терминах соответствующих координат ξ , нужные формулы можно найти в справочниках.

Общая идея метода разделения переменных состоит в том, что частное решение уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$ в конкретной системе координат с переменными ξ ищется в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной из трех переменных ξ_i :

$$\psi = A(\xi_1)B(\xi_2)C(\xi_3), \quad (\Delta\psi = 0). \quad (313)$$

Оказывается, что во многих случаях частное решение уравнения Лапласа действительно можно найти в виде (313), при этом таких решений достаточно много, так что их набор образует полную (а иногда даже и переполненную) систему, т. е. произвольное решение уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$ есть некоторая линейная комбинация частных решений вида (313). В математике доказано, что есть 11 систем координат, для которых можно получить общее решение в виде суперпозиции частных решений типа (313) (Джексон [1], с. 64). С практической точки зрения наиболее важными являются декартовы, цилиндрические и сферические системы координат. В декартовой системе $\xi_i = x_i$ и решение типа (313) имеет вид

$$\psi = \exp(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3), \quad k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0, \quad (314)$$

где среди произвольных параметров k_i должны быть как вещественные, так и мнимые, чтобы было можно удовлетворить условию связи на k_i в (314). Суперпозиции функций типа $\exp(\pm ikx)$ сводятся к синусам и косинусам, а суперпозиции функций типа $\exp(\pm kx)$ — к их гиперболическим аналогам. Для цилиндрических координат $\xi = \{z, \rho, \varphi\}$ решения типа (313) имеют следующий вид:

$$\psi = e^{kz} e^{im\varphi} J_m(k\rho) \text{ или } \psi = e^{kz} e^{im\varphi} N_m(k\rho), \quad (315)$$

где m — любое целое число, k — произвольное (вещественное или мнимое) число, J_m и N_m — функции Бесселя и Неймана. Их линейные комбинации $H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x)$ и $H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x)$, которые называются функциями Ханкеля, также можно использовать в качестве двух линейно независимых решений вместо пары J_m , N_m . Все нужные сведения об этих функциях можно найти в математических справочниках, например,

в [4]. Мы привели сведения о решениях уравнения Лапласа типа (313) для декартовых и цилиндрических систем координат только для полноты изложения, а в дальнейшем в качестве основного примера будем рассматривать решения задач методом разделения переменных в сферической системе координат с $\xi = \{r, \theta, \varphi\}$. В этой системе также есть два линейно независимых решения типа (313), а именно:

$$\psi = r^l e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta) \text{ или } \psi = r^{-l-1} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta), \quad (316)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$ — целое неотрицательное число, m — также целое число, принимающее при заданном l значения от $-l$ до l , P_l^m — “присоединенные полиномы Лежандра”. Сейчас мы опишем все эти функции подробнее.

Сферические гармоники Y_{lm} . Входящие в (316) функции углов θ и φ называются “сферическими гармониками” и обозначают через $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Они нумеруются целочисленными индексами l, m , где $l = 0, 1, 2, \dots$, а m при заданном l принимает значения от $-l$ до l (т. е. всего $2l + 1$ значений). Функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ с разным знаком m считаются связанными соотношением

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi), \quad (317)$$

где символ “*” — знак комплексного сопряжения. Поэтому в дальнейшем мы будем приводить явные выражения лишь для функций Y_{lm} с $m \geq 0$, функции Y_{lm} с $m < 0$ находятся по ним из (317). По определению

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} \exp(im\varphi) P_l^m(\cos \theta), \quad (318)$$

где C_{lm} — числовые коэффициенты

$$C_{lm} = [(l-m)!(2l+1)/(l+m)!4\pi]^{1/2}, \quad (319)$$

P_l^m — присоединенные полиномы Лежандра, определенные при $m \geq 0$ соотношением

$$P_l^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{m/2} (d/dz)^m P_l(z), \quad (320)$$

в котором $P_l(z)$ — обычные полиномы Лежандра:

$$P_l(z) = [(d/dz)^l (z^2 - 1)^l] / l! 2^l. \quad (321)$$

Полиномы $P_l(z)$ обладают определенной четностью по аргументу z , совпадающей с четностью их индекса l , и для всех $P_l(1) = 1$. Первые полиномы Лежандра (321) имеют следующий вид:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = (3z^2 - 1)/2. \quad (322)$$

Из соотношений (318) и (320) очевидно, что при $m = 0$ присоединенные полиномы Лежандра совпадают с обычными, а сферические гармоники Y_{l0} кратны $P_l(\cos \theta)$. Сферические гармоники Y_{lm} образуют полную ортонормированную систему функций от углов θ и φ , т. е. "функций на сфере". Для сокращения записи вместо двух углов θ и φ можно использовать единичный вектор направления $\vec{n} = \vec{x}/r$, $r \equiv |\vec{x}|$, а угловое интегрирование в (310) обозначать сокращенно через $\int d\vec{n}$... Квадратично интегрируемые функции от углов $\psi(\vec{n})$ образуют гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\psi_1, \psi_2) = \int d\vec{n} \psi_1^*(\vec{n}) \psi_2(\vec{n}). \quad (323)$$

Ортонормированность системы сферических гармоник Y_{lm} в обозначениях (323) выражается равенством

$$(Y_{lm}, Y_{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (324)$$

а полнота этой системы означает, что любая квадратично интегрируемая функция от углов $\psi(\vec{n})$ может быть представлена в виде "ряда Фурье" по гармоникам Y_{lm} :

$$\psi(\vec{n}) = \sum_{lm} c_{lm} Y_{lm}(\vec{n}), \quad \sum_{lm} \dots \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \dots, \quad (325)$$

где c_{lm} — "коэффициенты Фурье", в обозначениях (323) определяемые соотношением $c_{lm} = (Y_{lm}, \psi)$. Во избежание недоразумений мы указали в (325) точный смысл символа суммирования по lm , так он и должен пониматься во всех формулах. Если функция $\psi(\vec{n})$ имеет осевую симметрию, т. е. не зависит от угла φ , то в разложении (325) остаются лишь гармоники с $m = 0$, для которых $Y_{l0} \propto P_l$ согласно (318). Тогда вместо (325) можно использовать разложение по простым полиномам Лежандра:

$$\psi(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos \theta). \quad (326)$$

Во многие формулы входит множитель $1/|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ с двумя трехмерными векторами $\vec{x}_{1,2}$, поэтому при переходе к сферическим координатам полезно следующее соотношение:

$$1/|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = 4\pi \sum_{lm} \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_{\min}^l}{r_{\max}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vec{n}_1) Y_{lm}(\vec{n}_2), \quad (327)$$

в котором $r_i \equiv |\vec{x}_i|$, $\vec{n}_i \equiv \vec{x}_i/r_i$, а $r_{\max}$ и $r_{\min}$ обозначают, соответственно, максимальное и минимальное по величине значение двух переменных r_1 и r_2 . Если вектор $\vec{x}_1$ направлен по оси "3" (она же "ось z "), а вектор $\vec{x}_2$ — под углом θ к этой оси, то вместо (327) можно использовать более простое разложение по полиномам Лежандра:

$$1/|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{\min}^l}{r_{\max}^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (328)$$

Общее решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Общее решение уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$ в сферических координатах является суперпозицией частных решений (316), угловые части которых пропорциональны сферическим гармоникам Y_{lm} :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{lm} [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (329)$$

где A_{lm} и B_{lm} — произвольные числовые коэффициенты, а суммирование по lm понимается так, как указано в соотношении (325). Вместо двух углов θ и φ можно использовать как обозначение единичный вектор $\vec{n}$. Вклады $\propto r^l$ в (329) гармоничны во всем пространстве (поэтому их суперпозиция — общий вид потенциала внешнего поля в сферической системе координат) и не убывают на бесконечности, а вклады $\propto r^{-l-1}$ на бесконечности убывают, но не являются гармоническими при $r = 0$. Поэтому общее выражение (329) используется для функций, гармонических внутри любого сферического слоя $R_1 < r < R_2$, в котором нет "ни нуля, ни бесконечности" по r . Для шара $r < R$, содержащего точку $r = 0$, из разложения типа (329) нужно исключить вклады $\propto r^{-l-1}$, поскольку они не являются гармоническими при $r = 0$, а если рассматривается некоторая внешняя область с $r > R$ и при этом речь идет о потенциале, создаваемом самой системой, который (по условию) убывает на бесконечности, то из разложения (329) нужно исключить не убывающие на бесконечности вклады $\propto r^l$. Все не исчезающие на бесконечности вклады в потенциал φ могут представлять только заданное внешнее поле, если оно присутствует в задаче. При наличии осевой симметрии, когда искомая гармоническая функция ψ не зависит от угла φ , вместо (329) можно использовать более простое разложение по полиномам Лежандра:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l(\cos \theta) \quad (330)$$

с произвольными числовыми коэффициентами A_l и B_l и с теми же уточнениями относительно поведения вкладов при $r = 0$ и при $r \rightarrow \infty$, как и для разложения (329).

Примеры решения конкретных задач. *Первый пример:* пусть есть металлическая сфера с заданным потенциалом V и с заданным радиусом R_1 , окруженная concentрически сферическим слоем диэлектрика с внешним радиусом R_2 и с заданной диэлектрической проницаемостью ϵ . Вне диэлектрика — вакуум ($\epsilon = 1$), и вся система находится в заданном однородном внешнем поле $\vec{E}$ (см. рис. 3.7).

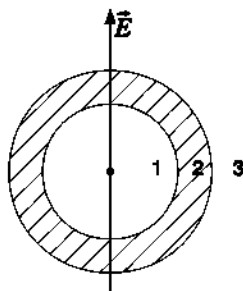


Рис. 3.7. Металлическая сфера, окруженная диэлектриком, в однородном внешнем поле

Направим ось “3” (она же ось “z”) по направлению внешнего поля $\vec{E}$. Тогда очевидно, что задача имеет осевую симметрию, для гармонических функций можно пользоваться разложением по полиномам Лежандра (330), а потенциал однородного внешнего поля (307) можно перенести в сферических координатах с учетом (322) следующим образом:

$$\varphi^{\text{вн}} = -Ex_3 = -Er \cos \theta = -ErP_1(\cos \theta). \quad (331)$$

Обозначим индексам $i = 1, 2, 3$ следующие три области: “1” — внутри металлической сферы, “2” — внутри диэлектрического слоя, “3” — снаружи от него. Пусть φ_i — потенциал внутри каждой из этих трех областей, все это гармонические функции. Ясно, что внутри металла $\varphi_1 = V$, т. е. нетривиальны лишь потенциалы φ_2 и φ_3 . Для потенциала φ_2 внутри диэлектрика нужно использовать общее разложение (330):

$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l(\cos \theta), \quad (332)$$

а потенциал φ_3 во внешней области должен быть суммой известного внешнего поля (331) и убывающих на бесконечности вкладов типа (330) от потенциала, создаваемого самой системой:

$$\varphi_3 = -ErP_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta). \quad (333)$$

Входящие в ряды (332), (333) неизвестные числовые коэффициенты A_l , B_l , C_l ищутся из условий сшивания (259), (260), причем в нашей задаче на границе раздела диэлектрик — вакуум следует считать $\sigma^{\text{своб}} = 0$, поскольку наличие свободного поверхностного заряда на этой границе в условиях задачи не указано. Это значит, что нормальная компонента $\vec{D}_n$ вектора индукции $\vec{D}$ на этой границе непрерывна. Таким образом, мы имеем одно условие сшивания (260) на границе раздела металл — диэлектрик ($r = R_1$):

$$V = \varphi_2 \text{ при } r = R_1 \quad (334)$$

и два вытекающих из (259) условия на границе диэлектрик — вакуум:

$$\varphi_2 = \varphi_3, \quad \varepsilon \partial \varphi_2 / \partial r = \partial \varphi_3 / \partial r \text{ при } r = R_2. \quad (335)$$

При записи второго условия (335) — непрерывности нормальных составляющих вектора индукции — мы воспользовались тем, что в сферической системе координат нормальная составляющая $\vec{E}_n$ вектора $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ вычисляется очень просто: $\vec{E}_n = -\partial \varphi(r, \theta, \varphi) / \partial r$, а $\vec{D}_n = \varepsilon \vec{E}_n$ со своим значением ε в каждой из областей (для вакуума $\varepsilon = 1$). Подставляя в условия (334), (335) разложения (332), (333) с учетом $P_0(z) = 1$ в (322) получаем следующие соотношения:

$$V = VP_0 = \sum_l [A_l R_1^l + B_l R_1^{-l-1}] P_l, \quad (336)$$

$$\sum_l [A_l R_2^l + B_l R_2^{-l-1}] P_l = -ER_2 P_1 + \sum_l C_l R_2^{-l-1} P_l, \quad (337)$$

$$\varepsilon \sum_l [l A_l R_2^{l-1} - (l+1) B_l R_2^{-l-2}] P_l = -EP_1 - \sum_l (l+1) C_l R_2^{-l-2} P_l, \quad (338)$$

где все $P_l = P_l(\cos \theta)$, а все суммы по l — от нуля до бесконечности. Отметим, что соотношение (338) получается дифференцированием (337) по R_2 и умножением на нужное значение ε каждой из сторон равенства. Соотношения (336)–(338) — равенства рядов с полиномами Лежандра $P_l = P_l(\cos \theta)$.

Поскольку все эти полиномы линейно независимы (это следует из ортогональности функций Y_{lm} с учетом $P_l \propto Y_{l0}$), из равенства рядов вытекает почленное равенство коэффициентов при каждом из полиномов P_l . В соотношениях (336)–(338) выделенную роль играют гармоники с $l = 0$ и $l = 1$, так как для них в уравнениях есть неоднородности, т. е. “внешние возмущения”: для $l = 0$ это заданный потенциал V металлической сферы $\propto P_0$, а для $l = 1$ — внешнее поле $\propto P_1$. Приравнявая в (336)–(338) коэффициенты при P_0 , получаем:

$$V = A_0 + B_0 R_1^{-1}, \quad A_0 + B_0 R_2^{-1} = C_0 R_2^{-1}, \quad \varepsilon B_0 R_2^{-2} = C_0 R_2^{-2}, \quad (339)$$

а из равенства коэффициентов при P_1 следует

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 R_1 + B_1 R_1^{-2}, \\ A_1 R_2 + B_1 R_2^{-2} &= -E R_2 + C_1 R_2^{-2}, \\ \varepsilon [A_1 - 2B_1 R_2^{-3}] &= -E - 2C_1 R_2^{-3}. \end{aligned} \quad (340)$$

Для коэффициентов A_l , B_l , C_l при всех прочих P_l с $l \geq 2$ из (336)–(338) получим три линейных однородных уравнения, явный вид которых нам не понадобится. Соотношения (339) — система трех линейных неоднородных (из-за вклада V) уравнений для определения трех неизвестных коэффициентов A_0 , B_0 , C_0 , а (340) — аналогичная система (с неоднородностью от E) для определения коэффициентов A_1 , B_1 , C_1 . Поскольку мы заранее уверены из общих соображений в существовании и единственности решения (см. начало раздела), ясно, что определители всех этих линейных систем должны быть отличными от нуля. Отсюда следует, что коэффициенты при гармониках P_0 и P_1 из уравнений (339), (340) определяются однозначно (их явный вид предоставляем найти читателю), а коэффициенты A_l , B_l , C_l при всех прочих P_l с $l \geq 2$ должны быть равны нулю, поскольку любая система линейных однородных уравнений с отличным от нуля определителем имеет только нулевое решение. Мы разобрали эту задачу подробно, чтобы на конкретном примере показать, как используются разложения по сферическим гармоникам. На самом деле отсутствие в решении гармоник с $l \geq 2$ можно было бы предугадать с самого начала из приведенных выше соображений. Общий принцип состоит в том, что в решении могут присутствовать только те гармоники, которые фигурируют в каком-нибудь “внешнем возмущении”, вводимом в систему, — этим обеспечивается неоднородность линейных уравнений для соответствующих коэффициентов при гармониках. Например, если у нас имеется диэлектрический или

заземленный металлический шар в однородном внешнем электрическом поле, то с учетом осевой симметрии заранее ясно, что в ответах может присутствовать только гармоника P_1 , а если такой же шар находится, например, во внешнем поле $\propto r^2 Y_{21}(\theta, \varphi)$, то в ответ будут входить лишь вклады с гармоникой Y_{21} , и т. п. Ясно также, что решение методом разделения переменных в сферических координатах возможно лишь для задач с концентрическими сферическими границами, поскольку ряды типа (329) могут сходиться лишь в шаровых слоях, а нам они нужны вплоть до границы раздела для использования условий сшивания. При других границах в методе разделения переменных нужно использовать другие системы координат, соответствующие типу границ. Например, для задач с параллелепипедами подходит обычная декартова система координат, для задач с цилиндрическими границами — цилиндрическая система координат, и т. п.

Второй пример: диэлектрический шар и точечный заряд. Пусть есть диэлектрический шар с заданным радиусом R и с заданным значением ε , вне шара — вакуум и на некотором расстоянии $R_Q > R$ от центра шара находится заданный точечный заряд Q . Задача обычная: найти потенциалы φ_1 (внутри шара) и φ_2 (вне шара). Потенциал φ_1 внутри шара — гармоническая функция, а потенциал φ_2 вне шара должен удовлетворять уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ с δ -образной плотностью ρ , соответствующей заданному точечному заряду. Решение для φ_2 будем искать по изложенной в начале раздела общей схеме: положим $\varphi_2 = \bar{\varphi}_2 + \psi$, где ψ — некоторая гармоническая функция, а $\bar{\varphi}_2$ — потенциал точечного заряда для задачи без границ, т. е. обычное выражение Q/r' , где r' — расстояние от заряда до точки наблюдения.

Поместим начало отсчета координат в центре шара, а ось “3” направим на заряд, тогда будем иметь осевую симметрию. Пусть $\vec{x}_Q$ — трехмерный вектор положения заряда в нашей системе, а $\vec{x}$ — вектор в точку наблюдения, тогда $\bar{\varphi}_2 = Q/|\vec{x}_Q - \vec{x}|$. Поскольку вектор $\vec{x}_Q$ направлен по оси “3”, для функции $\bar{\varphi}_2$ можно пользоваться разложением по полиномам Лежандра (328). В дальнейшем мы будем использовать такое разложение при записи условий сшивания на поверхности шара, поэтому будем считать, что $r \equiv |\vec{x}| < |\vec{x}_Q| \equiv R_Q$. Тогда в разложении (328) $r_{\min} = r$, $r_{\max} = R_Q$, так что

$$\bar{\varphi}_2 = Q/|\vec{x}_Q - \vec{x}| = Q \sum_{l=0}^{\infty} r^l R_Q^{-l-1} P_l(\cos \theta), \quad (341)$$

где θ — угол между векторами $\vec{x}_Q$ и $\vec{x}$.

Ввиду осевой симметрии гармонический потенциал φ_1 внутри шара ищем в виде (330), опуская сингулярные в нуле вклады:

$$\varphi_1 = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad (342)$$

а вне шара $\varphi_2 = \bar{\varphi}_2 + \psi$, где $\bar{\varphi}_2$ при $r < R_Q$ — выражение (341), ψ — гармоническая функция типа (330) с убывающими на бесконечности вкладками:

$$\varphi_2 = \bar{\varphi}_2 + \psi = Q \sum_l r^l R_Q^{-l-1} P_l(\cos \theta) + \sum_l B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta). \quad (343)$$

Первое слагаемое представляет $\bar{\varphi}_2$ в области $R \leq r < R_Q$, второе — гармоническую функцию ψ при любом $r \geq R$.

Коэффициенты A_l и B_l в разложениях (342), (343) находятся из условий сшивания (259) с $\sigma^{\text{своб}} = 0$, поскольку наличие поверхностного свободного заряда на поверхности шара в условиях задачи не оговаривалось. Таким образом, мы имеем аналогичные (335) условия сшивания на поверхности шара ($r = R$):

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon \partial \varphi_1 / \partial r = \partial \varphi_2 / \partial r \quad \text{при } r = R. \quad (344)$$

Подставляя сюда разложения (342), (343), получаем:

$$\sum_l A_l R^l P_l = \sum_l [Q R^l R_Q^{-l-1} + B_l R^{-l-1}] P_l, \quad (345)$$

$$\varepsilon \sum_l l A_l R^{l-1} P_l = \sum_l [l Q R^{l-1} R_Q^{-l-1} - (l+1) B_l R^{-l-2}] P_l. \quad (346)$$

Приравнявая здесь коэффициенты при всех гармониках $P_l = P_l(\cos \theta)$, получаем систему двух линейных неоднородных уравнений для коэффициентов A_l , B_l :

$$A_l R^l = Q R^l R_Q^{-l-1} + B_l R^{-l-1}, \quad (347)$$

$$\varepsilon l A_l R^{l-1} = l Q R^{l-1} R_Q^{-l-1} - (l+1) B_l R^{-l-2}. \quad (348)$$

Решение этой системы существует и единственно, заинтересованный читатель может найти его самостоятельно.

На этом мы заканчиваем обсуждение статики и переходим к последней четвертой главе — “Динамика”. Мы обсуждали выше лишь краевые задачи электростатики. Задачи магнитостатики решаются аналогично, хотя они, как правило, сложнее из-за векторной природы потенциала и более сложного вида условий сшивания на границах раздела.

Глава 4

Динамика

Теперь мы переходим к динамическим задачам, в которых все величины зависят не только от пространственных координат $\vec{x}$, но и от времени t .

4.1 Постановка задачи, общий вид решения

Постановка задачи. Сначала мы будем рассматривать задачи для полей в вакууме, базовыми формулами являются уравнения Максвелла (1)–(4) для напряженностей или эквивалентные им уравнения (15) для потенциалов в произвольной калибровке. В лоренцовой калибровке (18) уравнения (15) сводятся к неоднородным волновым уравнениям (19), которые мы воспроизведем здесь для удобства читателя:

$$\square\varphi = 4\pi\rho, \quad \square\vec{A} = (4\pi/c)\vec{j}, \quad \square \equiv c^{-2}\partial_t^2 - \Delta, \quad (349)$$

где $\square$ — волновой оператор, в котором $\Delta = \partial_i\partial_i$ — оператор Лапласа.

По общему правилу, решение линейных неоднородных уравнений (349) есть сумма общего решения соответствующих однородных уравнений и любого частного решения неоднородных уравнений. Первый вклад описывает свободные электромагнитные волны без источников (“свет”), под вторым вкладом всегда будем понимать поле, создаваемое самими источниками $\rho, \vec{j}$. Между ними есть важное физическое различие: свободное поле приносит энергию из $-\infty$ по времени и уносит ее на $+\infty$, тогда как поле “самых источников” при $t = -\infty$ должно отсутствовать, — оно возникает лишь во время включения источников и затем уходит на бесконечность в виде расходящихся волн. Требование отсутствия полей источников ранее

момента их включения есть “условие запаздывания”, которое будет использоваться впоследствии (п. 4.2) при расчете создаваемых источниками полей. Только этот вклад и будет подробно рассматриваться в дальнейшем, и лишь для полноты изложения мы кратко обсудим решения уравнений (349) без источников — свободные поля.

Свободные поля, плоские волны. В терминах потенциалов свободные поля — решения однородных волновых уравнений $\square\varphi = 0$, $\square\vec{A} = 0$. Ясно, что на эти решения нельзя накладывать дополнительные асимптотические условия “достаточно быстрого убывания” (п. 1.7) или “запаздывания”, поскольку они исключают нетривиальные решения однородных уравнений, а именно они нас сейчас интересуют. Как пояснялось в п. 1.7, при снятии таких дополнительных условий лоренцова калибровка (18) уже не определяет искомые потенциалы однозначно: в них еще остается “калибровочный произвол”, для ликвидации которого в дополнение к (18) на потенциалы можно наложить еще одно калибровочное условие, например, $\varphi = 0$. Вместе с калибровкой Лоренца (18) это дает два условия: $\varphi = 0$, $\text{div } \vec{A} = 0$. Можно проверить, что для свободных полей эти условия допустимы, т. е. им всегда можно удовлетворить подходящим выбором калибровочного преобразования, — доказательство предоставляем читателю.

Свободные поля проще рассматривать прямо на языке напряженностей, исходя из основных уравнений Максвелла (1)–(4) с нулевыми источниками $\rho, \vec{j}$:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{H} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} - c^{-1} \partial_t \vec{E} = 0. \quad (350)$$

Если к двум роторным уравнениям применить еще один раз операцию “rot” и воспользоваться равенством $\text{rot rot } \vec{X} = \vec{\nabla} \text{div } \vec{X} - \Delta \vec{X}$, то с учетом двух первых соотношений (350) для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ получим стандартные волновые уравнения:

$$\square \vec{E} = 0, \quad \square \vec{H} = 0. \quad (351)$$

Легко проверить, что волновое уравнение $\square F = 0$ для вещественной функции F имеет решения в виде плоских монохроматических волн:

$$F(t, \vec{x}) = A_F \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \delta_F), \quad \omega = ck \equiv c|\vec{k}|. \quad (352)$$

Произвольный параметр $\vec{k}$ называют волновым вектором, ω — частотой, положительный коэффициент A_F — амплитуда волны, δ_F — “сдвиг фазы”. Функция (352) удовлетворяет волновому уравнению при любом $\vec{k}$ и $\omega = ck$,

где $k \equiv |\vec{k}|$. Аргумент косинуса $\Phi = \vec{k}\vec{x} - \omega t + \delta_F$ — фаза волны, условие $\Phi = \text{const}$ при фиксированном значении t определяет в трехмерном пространстве координат $\vec{x}$ “поверхность постоянной фазы”, — это плоскость, ортогональная волновому вектору $\vec{k}$ и перемещающаяся в пространстве со скоростью $\omega/k = c$. Эту величину ω/k , т. е. скорость движения поверхности постоянной фазы, называют фазовой скоростью волны. Для решений волнового уравнения она совпадает с параметром “ c ”, входящим в определение волнового оператора (349).

При работе с объектами типа (352) удобно перейти к их комплексным аналогам. Будем называть исходную вещественную величину (352) “физической” и обозначать ее индексом “физ”, полагая $F^{\text{физ}}(t, \vec{x}) = \text{Re } F(t, \vec{x})$, где $F(t, \vec{x})$ — комплексный аналог $F^{\text{физ}}(t, \vec{x})$:

$$\begin{aligned} F(t, \vec{x}) &= F e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, \\ F &= A_F \exp(i\delta_F), \\ F^{\text{физ}}(t, \vec{x}) &= \text{Re } F(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (353)$$

Не зависящий от $t, \vec{x}$ комплексный амплитудный множитель F в правой части содержит информацию как об амплитуде волны A_F , так и о ее сдвиге фазы δ_F . Мы обозначаем его той же буквой F , как и функцию $F(t, \vec{x})$ в левой части равенства, поскольку эти величины всегда легко различить по контексту, а однотипность обозначений облегчает восприятие формул.

Линейным уравнениям (350), (351) должны удовлетворять как вещественные, так и мнимые части выражений типа (353), следовательно, и эти комплексные величины в целом. Подставим в уравнения (350), (351) комплексные аналоги напряженностей (353):

$$\vec{E}(t, x) = \vec{E} \exp(i\Phi), \quad \vec{H}(t, x) = \vec{H} \exp(i\Phi), \quad \Phi \equiv \vec{k}\vec{x} - \omega t, \quad (354)$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в правых частях — не зависящие от $t, \vec{x}$ комплексные амплитуды. Функции (354) удовлетворяют волновым уравнениям (351) при $\omega = ck$ для произвольного волнового вектора $\vec{k}$ с $k \equiv |\vec{k}|$. На функциях вида (354) производные $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ и $\partial_s \equiv \partial/\partial x_s$ становятся простыми числовыми множителями:

$$\partial_t \rightarrow -i\omega, \quad \partial_s \rightarrow ik_s. \quad (355)$$

После такой замены уравнения (351) для функций (354) принимают вид

$$(\vec{k}\vec{E}) = 0, \quad (\vec{k}\vec{H}) = 0, \quad \vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}], \quad \vec{E} = [\vec{H} \times \vec{n}], \quad (356)$$

где $\vec{n} = \vec{k}/k$ — единичный вектор направления распространения волны. Ясно, что первая пара этих уравнений — автоматическое следствие второй, так как из них следует, что векторы $\vec{E}(t, \vec{x})$ и $\vec{H}(t, \vec{x})$ в любой момент времени t и в любой точке пространства $\vec{x}$ ортогональны друг к другу и к направлению распространения волны $\vec{n}$. Если ввести любые два единичных орта $\vec{e}_{1,2}$, ортогональных друг к другу и к вектору $\vec{n}$, то любую из комплексных амплитуд $\vec{F} = \{\vec{E}, \vec{H}\}$ можно разложить по этому базису:

$$\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2, \quad \vec{F} = \{\vec{E}, \vec{H}\}. \quad (357)$$

Поведение соответствующих величин $\vec{F}(t, \vec{x})$ в (353) как функций $t, \vec{x}$ зависит от относительного сдвига фаз δ_i компонент вектора $\vec{F}_i$, или, эквивалентно, коэффициентов $F_{1,2}$ в (357): если все эти сдвиги фаз одинаковы (тем самым устранимы сдвигом начала отсчета времени), то $F_{1,2}$ в (357) можно считать просто вещественными величинами, а каждый из векторов $\vec{F}(t, \vec{x}) = \{\vec{E}(t, \vec{x}), \vec{H}(t, \vec{x})\}$ — направленным по одной прямой в любой момент времени и в любой точке пространства, при этом $\vec{H}(t, \vec{x}) \perp \vec{E}(t, \vec{x})$ согласно (356). Такую волну называют “линейно поляризованной”. Если же комплексные амплитуды $E_{1,2}$ в выражении (357) для $\vec{E}$ равны по модулю, но различаются сдвигом фазы $\pm\pi/2$, то мы имеем волну с двумя вариантами круговой поляризации — “левой” или “правой” (в физике элементарных частиц вместо этого говорят “с двумя разными спиральностями” ± 1). Тогда вектор $\vec{E}(t, \vec{x})$, рассматриваемый как функция времени t в любой фиксированной точке пространства $\vec{x}$, совершает круговое движение с частотой ω “по” или “против” часовой стрелки в ортогональном направлению волны $\vec{n}$ плоскости. Это справедливо и для вектора $\vec{H}(t, \vec{x})$, который в силу соотношений (356) всегда ортогонален вектору $\vec{E}(t, \vec{x})$ и совпадает с ним по модулю. В общем случае при произвольных амплитудах $E_{1,2}$ в (357) и произвольном относительном сдвиге фазы между этими двумя величинами волна является “эллиптически поляризованной”.

Если рассматривать билинейные по полям величины типа объемной плотности энергии $W = (E^2 + H^2)/8\pi$ или вектора плотности потока энергии $\vec{S} = (c/4\pi)[\vec{E} \times \vec{H}]$ из (129), то под $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в этих соотношениях нужно понимать, конечно, “физические поля”, т. е. вещественные части выражений типа (354) с комплексными $F \equiv F(t, \vec{x})$:

$$F^{\text{физ}} = \text{Re } F = (F + F^*)/2. \quad (358)$$

Подставив такие выражения для напряженностей (354) в определение плотности потока энергии $\vec{S}$, получим:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= (c/4\pi)[\vec{E}^{\text{физ}} \times \vec{H}^{\text{физ}}] = \\ &= (c/16\pi)\{[\vec{E} \times \vec{H}]e^{2i\Phi} + [\vec{E}^* \times \vec{H}^*]e^{-2i\Phi} + [\vec{E} \times \vec{H}^*] + [\vec{E}^* \times \vec{H}]\},\end{aligned}\quad (359)$$

где $\Phi = \vec{k}\vec{x} - \omega t$ — фаза волны, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — не зависящие от t , $\vec{x}$ комплексные амплитуды. Два последних вклада в (359) взаимно сопряжены и не зависят от t , $\vec{x}$ (поскольку в них фазовые множители сокращаются), а в двух первых остается гармоническая зависимость $\propto \exp(\pm 2i\Phi)$. Поэтому всегда рассматривается усредненная по времени величина $\langle \vec{S} \rangle$ (скобки $\langle \dots \rangle$ — символ усреднения), в которой два первых вклада (359) просто отбрасываются, так как их средние по времени равны нулю, а два последних вклада ввиду их взаимной сопряженности заменяются удвоенной вещественной частью одного из них:

$$\langle \vec{S} \rangle = (c/8\pi) \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = (c/8\pi)|\vec{E}|^2 \vec{n}, \quad (360)$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — не зависящие от t , $\vec{x}$ комплексные амплитуды напряженностей в (354), $\vec{n}$ — единичный вектор направления распространения волны, $|\vec{E}|^2 = (\vec{E}, \vec{E}^*)$ — квадрат модуля комплексного вектора $\vec{E}$. При получении второго равенства (360) мы использовали известную из соотношений (356) связь между амплитудами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и стандартное правило “БАЦ–ЦАБ”: $[\vec{E} \times \vec{H}^*] = [\vec{E}[\vec{n} \times \vec{E}^*]] = \vec{n}(\vec{E}, \vec{E}^*) - \vec{E}^*(\vec{E}\vec{n})$, последнее слагаемое равно нулю в силу известной из (356) ортогональности векторов $\vec{E}$ и $\vec{n}$.

Для объемной плотности энергии $W = [(\vec{E}^{\text{физ}})^2 + (\vec{H}^{\text{физ}})^2]/8\pi$ после подстановки для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ их вещественных составляющих (358) и усреднения по времени с учетом вытекающего из (356) равенства $|\dot{\vec{H}}| = |\dot{\vec{E}}|$ получаем:

$$\langle W \rangle = (1/16\pi)(|\dot{\vec{E}}|^2 + |\dot{\vec{H}}|^2) = (1/8\pi)|\dot{\vec{E}}|^2. \quad (361)$$

Усредненная плотность энергии $\langle W \rangle$ и плотность потока энергии (360) связаны стандартным соотношением: $\langle \vec{S} \rangle = c \langle W \rangle \vec{n}$.

Мы обсуждали выше монохроматические плоские волны — частные решения уравнений Максвелла (350). Общее решение этих уравнений — волновой пакет — произвольная суперпозиция плоских волн (интеграл Фурье) с разными волновыми векторами $\vec{k}$ и с произвольными весовыми множителями $A(\vec{k})$.

4.2 Запаздывающая функция Грина волнового оператора

Переходим теперь к нашей основной задаче — построению решений неоднородных волновых уравнений (349), представляющих “поле самих источников”. Мы будем строить такое решение с помощью метода функций Грина.

Функция Грина линейной дифференциальной операции. Для простоты будем говорить о функциях одной переменной x , обобщение на многомерные переменные типа $x = t, \vec{x}$ в волновом операторе тривиально. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$L\varphi(x) = f(x), \quad (362)$$

в котором L — заданная дифференциальная операция по аргументу x , функция $f(x)$ известна, $\varphi(x)$ ищется. *Определение:* функцией Грина операции L называется зависящая от удвоенного набора аргументов функция $G(x, x')$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$L_x G(x, x') = \delta(x - x') = \delta(x' - x) \quad (363)$$

с δ -функцией Дирака в правой части (см. ее определение в п. 2.17). Индексом “ x ” у L мы уточняем, что эта дифференциальная операция действует на аргумент x функции $G(x, x')$. Ниже будет показано, что δ -функция четна по своему аргументу, чем оправдывается второе равенство (363). Полезно также отметить, что функция Грина имеет простую физическую интерпретацию: если назвать условно $f(x)$ в (362) “источником”, а $\varphi(x)$ — “соответствующим полем”, то можно сказать, что функция Грина $G(x, x')$ — поле δ -образного источника, сосредоточенного в точке x' .

Утверждение: если известна функция Грина $G(x, x')$, то решение уравнения (362) дается соотношением

$$\varphi(x) = \int dx' G(x, x') f(x'). \quad (364)$$

Для доказательства этого утверждения подействуем на обе части равенства (364) операцией $L \equiv L_x$. Внеся ее под знак интеграла по x' в правой части, с учетом соотношения (363) получим:

$$L\varphi(x) = \int dx' L_x G(x, x') f(x') = \int dx' \delta(x' - x) f(x') = f(x),$$

что и требовалось доказать. При вычислении последнего интеграла мы воспользовались правилом (145) с очевидным изменением обозначений.

В общем случае решение уравнения (362) неоднозначно, произвол — любое решение однородного уравнения $L\varphi = 0$. Если оно имеет нетривиальные решения, то аналогичный произвол будет и в решениях уравнения (363), т. е. для таких операторов функция Грина также определяется неоднозначно. С этой проблемой мы еще столкнемся при определении функции Грина волнового оператора.

Ясно, что все приведенные выше соотношения очевидным образом обобщаются на случай многомерных переменных x .

Преобразования Фурье. Фурье-образ δ -функции и ее свойства. Напомним кратко основные формулы преобразований Фурье, ограничиваясь для простоты случаем одной переменной x (обобщения тривиальны). Фурье-образ $\bar{\varphi}(k)$ заданной функции $\varphi(x)$ определяется соотношением

$$\bar{\varphi}(k) = \int dx \varphi(x) \exp(-ikx), \quad (365)$$

переменные k и x называют “взаимно сопряженными”. Исходная функция $\varphi(x)$ восстанавливается по $\bar{\varphi}(k)$ с помощью “обратного преобразования Фурье”:

$$\varphi(x) = (1/2\pi) \int dk \bar{\varphi}(k) \exp(ikx). \quad (366)$$

Интегралы по x и k в этих двух соотношениях берутся по всей вещественной оси, т. е. в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. *Замечание:* вид формул (365), (366) можно менять, во-первых, одновременным изменением знака в показателях экспонент (важно лишь то, чтобы эти знаки в двух формулах были разными), во-вторых, распределением множителей $1/2\pi$ перед интегралами. В физической литературе обычно употребляется приведенная выше запись, которую мы всегда и будем использовать, а в математических текстах множитель $1/2\pi$ часто “делят пополам”, ставя перед интегралами в (365) и (366) одинаковый коэффициент $(2\pi)^{-1/2}$. Все это просто вопрос соглашения: важно лишь то, чтобы в прямом и обратном преобразовании Фурье на каждую одномерную переменную набрался бы в сумме множитель $1/2\pi$, а при обобщении на многомерные переменные — $1/2\pi$ на каждое измерение (в частности, $(2\pi)^{-4}$ для четырех переменных $t, \vec{x}$ в волновом операторе). Для многомерных переменных величины kx в показателях экспонент в (365) и (366) следует понимать, конечно, как скалярные произведения векторов.

С помощью соотношения (365) и правила вычисления интегралов с δ -функцией (145) можно вычислить фурье-образ $\bar{\delta}(k)$ простейшей δ -функции $\delta(x)$, что дает:

$$\bar{\delta}(k) = \int dx \delta(x) \exp(-ikx) = 1 \quad (367)$$

(отметим, что необходимое условие непрерывности функции f в (145) для интеграла (367) выполнено). Тогда обратное преобразование Фурье (366) с $\bar{\delta}(k) = 1$ приводит к следующему очень полезному фурье-представлению одномерной δ -функции:

$$\delta(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(ikx). \quad (368)$$

Обобщение на многомерные δ -функции очевидно: kx — скалярное произведение векторов и множитель $1/2\pi$ на каждое измерение.

Представление (368) позволяет легко доказать несколько важных свойств δ -функции. Первое из них — четность по x : если сделать в (368) замену $x \rightarrow -x$ и сопроводить ее заменой $k \rightarrow -k$ переменной интегрирования, то с учетом перестановки пределов интегрирования $\pm\infty$ получим

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (369)$$

что уже было использовано в записи (363).

Рассмотрим теперь величину $\delta(ax)$ с коэффициентом $a > 0$. Сделав замену $x \rightarrow ax$ в (368) и сопроводив ее заменой $k \rightarrow k/a$ переменной интегрирования, получим $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x)$, что вместе с (369) приводит к соотношению

$$\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x), \quad (370)$$

справедливому для любого знака коэффициента a .

В заключение добавим, что простота соотношения (367) — следствие принятого в (365), (366) правила расстановки множителей $1/2\pi$ перед интегралами. При другом выборе этой расстановки фурье-образ δ -функции $\bar{\delta}(k)$ был бы не просто единицей, а некоторой нетривиальной константой, что менее удобно (поэтому физики и предпочитают запись (365), (366)).

Построение функции Грина для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами методом преобразования Фурье. Допустим, что L в (362) — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, т. е. полином $L(d/dx)$ от операции дифференцирования d/dx — некоторая конечная сумма:

$$L = L(d/dx) = \sum c_k (d/dx)^k. \quad (371)$$

В общем случае коэффициенты c_k могли бы быть функциями от переменной x , для оператора с постоянными коэффициентами они считаются простыми константами.

Утверждение: для оператора с постоянными коэффициентами функцию Грина $G(x, x')$ в (363) можно искать (и найти) в виде

$$G(x, x') = g(x - x'), \quad (372)$$

где $g(x)$ — функция одной (а не двух, как у G) переменных x . Доказательством будет прямое построение искомой функции G в виде (372), к которому мы и переходим.

Подставив G в виде (372) в уравнение (363), получаем:

$$L_x g(x - x') = \delta(x - x'). \quad (373)$$

Поскольку наш оператор $L \equiv L_x$ (371) содержит, по условию, только производные d/dx , которые можно заменить, очевидно, на производные по разности $d/d(x - x')$, в уравнении (373) можно сделать замену переменных $x - x' \rightarrow x$, что дает

$$Lg(x) = \delta(x) \quad (374)$$

(важно, что в коэффициентах оператора L нет явной зависимости от x , которая помешала бы переходу от (373) к (374)). Мы убрали в (374) уточняющий индекс “ x ” у оператора L , поскольку при одной переменной x в нем нет надобности.

Решение уравнения (374) будем искать с помощью преобразования Фурье. Подставив в (374) представление (366) для искомой функции:

$$g(x) = (1/2\pi) \int dk \bar{g}(k) \exp(ikx) \quad (375)$$

и известное из (368) фурье-представление δ -функции, получим:

$$L \int dk \bar{g}(k) \exp(ikx) = \int dk \exp(ikx). \quad (376)$$

Результат действия операции L типа (371) на интеграл в (376) вычисляется очень просто: каждая производная d/dx проносится под знак интеграла по k и действует только на $\exp(ikx)$, т. е. превращается в простой множитель ik . Отсюда следует, что полином $L \equiv L(d/dx)$ после внесения под знак интеграла по k в (376) переходит в аналогичный полином $L(ik)$ с простой заменой d/dx на ik :

$$L \int dk \bar{g}(k) \exp(ikx) = \int dk \bar{g}(k) L(ik) \exp(ikx). \quad (377)$$

Поскольку равенство функций эквивалентно, как известно, равенству их фурье-образов, из соотношений (376) и (377) следует, что

$$\bar{g}(k) L(ik) = 1, \quad \text{т. е. } \bar{g}(k) = 1/L(ik). \quad (378)$$

Тем самым по заданной операции L находится фурье-образ $\bar{g}(k)$ функции $g(x)$. Подставив полученное выражение для $\bar{g}(k)$ в (375) и вычислив интеграл, найдем саму функцию $g(x)$, а затем из (372) — искомую функцию Грина $G(x, x')$.

Функция Грина волнового оператора, формальное решение.

Все сказанное выше с очевидным обобщением на случай четырехмерной переменной $x = t, \vec{x}$ приложимо и к волновому оператору $\square$ из (349). Аналогии формул преобразования Фурье (365), (366) для переменных $x = t, \vec{x}$ принято записывать следующим образом:

$$\bar{\varphi}(\omega, \vec{k}) = \int d\vec{x} \int dt \varphi(t, \vec{x}) \exp[i\omega t - i\vec{k}\vec{x}], \quad (379)$$

$$\varphi(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-4} \int d\vec{k} \int d\omega \bar{\varphi}(\omega, \vec{k}) \exp[-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}]. \quad (380)$$

Сопреженные с $t, \vec{x}$ переменные $\omega, \vec{k}$ называют, соответственно, частотой и волновым вектором, выбор знаков в показателях экспонент традиционный. Аналогом фурье-представления (368) для четырехмерной δ -функции $\delta(x) = \delta(t)\delta(\vec{x})$ является соотношение

$$\delta(x) = \delta(t)\delta(\vec{x}) = (2\pi)^{-4} \int d\vec{k} \int d\omega \exp[-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}]. \quad (381)$$

При действии волнового оператора $\square = c^{-2}\partial_t^2 - \partial_s \partial_s$ на выражение типа (380) производная ∂_t под знаком интеграла переходит в множитель $-i\omega$, а производные $\partial_s \equiv \partial/\partial x_s$ — в множители ik_s , так что

$$\square \rightarrow c^{-2}(-i\omega)^2 - (ik_s)(ik_s) = k^2 - c^{-2}\omega^2 \equiv L(\omega, \vec{k}), \quad (382)$$

здесь и далее $k \equiv |\vec{k}|$. Поэтому для фурье-образа $\bar{g}(\omega, \vec{k})$ функции Грина $g(t, \vec{x})$ волнового оператора по аналогии с (378) получаем:

$$\bar{g}(\omega, \vec{k}) = 1/L(\omega, \vec{k}) = -c^2/(\omega^2 - c^2k^2). \quad (383)$$

Координатная функция $g(t, \vec{x})$ получается подстановкой выражения (383) в интеграл Фурье тина (380), что дает:

$$g(t, \vec{x}) = -c^2(2\pi)^{-4} \int d\vec{k} \int d\omega \frac{1}{(\omega^2 - c^2k^2)} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}. \quad (384)$$

Это и есть формальное решение нашей задачи для функции $g(x) = g(t, \vec{x})$, по которой искомая функция Грина $G(x, x') = G(t, \vec{x}, t', \vec{x}')$ определяется соотношением (372).

Но это еще не окончательный ответ, поскольку интеграл (384) в строгом смысле слова не существует из-за обращения в нуль знаменателя подынтегрального выражения в точках $\omega = \pm ck$. Поясним подробнее: проблема заключается в вычислении интеграла по ω , который можно рассматривать как интеграл по контуру в плоскости комплексной переменной ω . Согласно определениям преобразования Фурье, таким контуром в (384) является вещественная ось с пределами интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$. Этот контур проходит прямо по полюсам в точках $\omega = \pm ck$, поэтому интеграл не существует. Но ему можно придать смысл подходящей процедурой доопределения, чем мы сейчас и займемся.

Доопределение функции Грина волнового оператора, принцип запаздывания. Итак, наша проблема — вычисление интеграла по ω в (384), который мы понимаем как интеграл по контуру в плоскости комплексной переменной ω . Исходный контур интегрирования в (384) — вещественная ось — проходит прямо по полюсам, поэтому интеграл не существует. Но ему можно придать смысл путем небольшой деформации контура интегрирования, обходя каждый из двух полюсов в точках $\omega = \pm ck$ сверху или снизу по небольшим полудугам вокруг полюсов (отметим, что “главное значение интеграла” — полусумма по двум таким вариантам обхода). Такая процедура, очевидно, неоднозначна, так как каждый из полюсов можно обходить либо сверху, либо снизу, что для двух полюсов дает четыре различных варианта выбора контура C с обходом полюсов.

Таким образом, процедура доопределения интеграла по ω в (384) сводится к замене исходного интеграла по вещественной оси интегралом по некоторому контуру C в комплексной плоскости ω , обходящему полюса сверху или снизу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega^2 - c^2 k^2)} e^{-i\omega t} \rightarrow \int_C d\omega \frac{1}{(\omega^2 - c^2 k^2)} e^{-i\omega t}. \quad (385)$$

Выбор контура C неоднозначен, так как есть 4 варианта обхода полюсов.

Но прежде чем заниматься проблемой выбора контура C , сначала нужно ответить на следующий простой вопрос: замена (385) придает смысл интегралу (384), но остается ли он после такой замены функцией Грина волнового оператора? Если “нет”, то вся процедура теряет смысл. Но в нашем случае ответ “да”, что мы сейчас покажем. Для этого выполним мысленно замену (385) в интеграле (384) и затем подействуем на полученное выражение волновым оператором $\square$. Этот оператор обычным образом пронесется под знак всех интегрирований и при действии на $\exp[-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}]$ даст множитель (382), который сокращает знаменатель в интеграле (384), тем самым устраняет полюса в подынтегральном выражении. В итоге мы приходим к интегралу типа (381) для δ -функции, только с деформированным контуром в интеграле по ω , а мы хотим получить обычную δ -функцию, т. е. интеграл без деформации контура. Так и будет, поскольку деформация контура в интеграле (381) на ответ не влияет ввиду аналитичности по ω подынтегрального выражения (важно, что полюса устранены), — деформированный контур C можно вернуть обратно на вещественную ось без изменения ответа, что и доказывает *утверждение*: интеграл (384) с деформированным контуром C остается функцией Грина волнового оператора.

Переходим теперь к следующему вопросу — проблеме выбора контура C . Основная идея — принцип запаздывания, сейчас мы его поясним. Как уже говорилось, функция Грина $G(x, x')$ имеет смысл поля δ -образного источника, сосредоточенного в точке x' . Отсюда с учетом соотношения (372) следует, что функция $g(x)$ в (374) — поле δ -образного источника, сосредоточенного в точке $x' = 0$. У нас $x = t, \vec{x}$ и δ -образность по всем переменным означает, что $g(x) = g(t, \vec{x})$ — поле точечного источника, находящегося в начале координат ($\vec{x}' = 0$) и выдающего “точечный по времени” (= “мгновенный”) импульс в момент $t' = 0$. Поскольку нас интересует поле, создаваемое самим источником, ясно, что мы должны наложить на функцию $g(x) = g(t, \vec{x})$ *условие запаздывания*:

$$g(t, \vec{x}) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (386)$$

так как источник не может создать поле раньше момента его включения (“не бывает следствия раньше причины”). Покажем теперь, что требованию (386) можно удовлетворить только одним вариантом выбора контура C при обходе полюсов, а именно “оба сверху” в интеграле (385). Его подынтегральное выражение — мероморфная функция, поэтому для замкнутого контура интеграл вычислялся бы очень просто по сумме вычетов. Наш контур C в (385) не замкнут (это деформированная вещественная ось), но его можно замкнуть добавкой равного нулю интеграла по “большой” (т. е. неограниченно расширяющейся) полудуге сверху или снизу. Это позволяет сделать *лемма Жордана*, все условия которой для интеграла (385) выполнены: она утверждает, что предел интеграла по одной из двух больших полудуг при неограниченном увеличении ее радиуса равен нулю. Такой интеграл можно добавить к исходному, что приведет к замкнутому контуру.

Для определения той из двух “больших полудуг”, интеграл по которой в пределе исчезает, есть простое правило, а именно: “та, в направлении которой по мнимой оси экспонента в интеграле является режущей”. У нас в (385) входит $\exp(-i\omega t)$ и при подстановке $\omega = iy$ с вещественной переменной $y = \text{Im } \omega$ на мнимой оси ω получаем $\exp(-i\omega t) = \exp(yt)$. Эта экспонента при $t < 0$ является режущей при $y \rightarrow +\infty$, а при $t > 0$ — при $y \rightarrow -\infty$, т. е. при $t < 0$ по лемме Жордана равен нулю интеграл по верхней полудуге, а при $t > 0$ — по нижней. Отсюда следует, что если при выборе контура C в (385) мы обходим оба полюса сверху и при $t < 0$ добавляем равный нулю интеграл по верхней большой полудуге, то в итоге получаем равный нулю интеграл по замкнутому контуру без полюсов внутри него, что и требуется согласно условию запаздывания (386). Любой другой вариант обхода полюсов или линейной комбинации таких вариантов дал бы отличный от нуля ответ, — доказать это строго предоставляем читателю.

Резюме: условие запаздывания (386) однозначно определяет правило обхода полюсов в (385) — “оба сверху”.

Явное вычисление запаздывающей функции Грина. Вычислим интеграл (384) с заменой (385) с контуром C , обходящим оба полюса сверху. При $t < 0$ ответ известен из (386), поэтому в дальнейшем считаем $t > 0$. Начнем с интеграла по ω (385). По лемме Жордана контур C при $t > 0$ можно дополнить нижней полудугой, что приведет к интегралу по замкнутому контуру с двумя полюсами в точках $\omega = \pm ck$ внутри него. Этот интеграл равен $(-2\pi i)x$ умножить на сумму вычетов в полюсах (минус из-за “неправильного” обхода контура), что дает

$$-2\pi i \left[\frac{e^{-ickt}}{2ck} + \frac{e^{ickt}}{(-2ck)} \right] = -\frac{2\pi}{ck} \sin(ckt).$$

Подставив этот результат в (384), получим:

$$g(t, \vec{x}) = c(2\pi)^{-3} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{x}} k^{-1} \sin(ckt). \quad (387)$$

Этот интеграл будем вычислять в сферических координатах k, θ, φ для вектора $\vec{k}$, направив ось "3" по вектору $\vec{x}$, тогда $\vec{k}\vec{x} = kr \cos \theta$, где $r \equiv |\vec{x}|$. С учетом правила (310) имеем:

$$g(t, \vec{x}) = c(2\pi)^{-3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ikr \cos \theta} k^{-1} \sin(ckt). \quad (388)$$

Интеграл по φ дает множитель 2π , так как подынтегральное выражение от φ не зависит. Интеграл по углу θ легко вычисляется с помощью замены переменной $\cos \theta = z$:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{ikr \cos \theta} = - \int_1^{-1} dz e^{ikr z} = (2/kr) \sin(kr).$$

В итоге после интегрирования по углам выражение (388) принимает вид

$$g(t, \vec{x}) = (c/2\pi^2 r) \int_0^\infty dk \sin(kr) \sin(ckt). \quad (389)$$

Оставшийся интеграл по k можно свести к δ -функциям с помощью справочной формулы (368). В нее входит интеграл по всей оси, а в (389) — по полуоси. Но если учесть, что подынтегральное выражение в (389) четно по k , интеграл по полуоси можно заменить интегралом по всей оси с коэффициентом $1/2$. Представив затем каждый из синусов в виде деленной на $2i$ разности экспонент, из (368) получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dk \sin(kr) \sin(ckt) = \\ &= - (1/8) \int_{-\infty}^{+\infty} dk [e^{ikr} - e^{-ikr}] [e^{ickt} - e^{-ickt}] = \\ &= - (\pi/4) [\delta(r + ct) + \delta(-r - ct) - \delta(r - ct) - \delta(-r + ct)]. \end{aligned} \quad (390)$$

У нас $t > 0$ по условию и $r \equiv |\vec{x}| > 0$ по определению, поэтому у первых двух δ -функций в (390) аргумент не может быть равным нулю и их следует просто отбросить (напомним, что δ -функция отлична от нуля лишь в своей "точке сосредоточения", т. е. там, где выражение под знаком δ исчезает). Таким образом, в (390) остаются лишь вклады двух последних δ -функций, совпадающие друг с другом в силу свойства четности δ -функции (369). Воспользовавшись также соотношением (370), выражение (390) можно переписать в виде $(\pi/2c)\delta(t - r/c)$. Подставив это в (389), получаем:

$$g(t, \vec{x}) = (1/4\pi r)\delta(t - r/c). \quad (391)$$

Это и есть окончательный ответ для функции $g(x) = g(t, \vec{x})$, в нем $r \equiv |\vec{x}|$. Мы получили его для $t > 0$, но он справедлив и при $t < 0$, так как автоматически удовлетворяет условию запаздывания (386): при $t < 0$ выражение под знаком δ в (391) в нуль не обращается.

4.3 Запаздывающие потенциалы

По известной из (391) функции $g(x) = g(t, \vec{x})$ из соотношения (372) находим функцию Грина $G(x, x') = G(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = g(t - t', \vec{x} - \vec{x}')$:

$$G(t, \vec{x}, t', \vec{x}') = (1/4\pi R)\delta(t - t' - R/c), \quad R \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (392)$$

Отсюда по общему правилу (364) с $x = t, \vec{x}$ и $f(x) = 4\pi\rho(x)$ находим решение волнового уравнения (349) для скалярного потенциала $\varphi(x) = \varphi(t, \vec{x})$:

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int d\vec{x}' \int dt' R^{-1} \rho(t', \vec{x}') \delta(t - t' - R/c), \quad R \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (393)$$

Входящая сюда δ -функция (в аргументе которой можно изменить общий знак согласно (369)) "снимает" интегрирование по переменной t' по правилу (145), что дает:

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int d\vec{x}' R^{-1} \rho(t', \vec{x}') \Big|_{t'=t-R/c, R=|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (394)$$

Аналогичные (393), (394) формулы для векторного потенциала $\vec{A}$ в волновом уравнении (349) получаются стандартной заменой $\varphi \rightarrow \vec{A}$, $\rho \rightarrow \vec{j}/c$, в частности,

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = c^{-1} \int d\vec{x}' R^{-1} \vec{j}(t', \vec{x}') \Big|_{t'=t-R/c, R=|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (395)$$

Соотношения (394), (395) — основные формулы для “запаздывающих потенциалов”, порождаемых произвольными источниками $\rho, \vec{j}$. Получаемые по этим формулам потенциалы автоматически удовлетворяют условию лоренцевой калибровки $c^{-1}\partial_t\varphi + \operatorname{div} \vec{A} = 0$ (18), что является следствием динамического уравнения непрерывности $\partial_t\rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ для источников $\rho, \vec{j}$, — предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно. Сказанное важно, поскольку простые волновые уравнения (349) справедливы только для потенциалов в лоренцевой калибровке. Поэтому предлагаемые решения этих уравнений (394), (395) во избежание внутреннего противоречия обязательно должны удовлетворять данному калибровочному условию, что и выполняется.

Если источники $\rho, \vec{j}$ не зависят от времени, то выражения (394), (395) совпадают со статическими решениями (176), (177) уравнений Пуассона.

Формулы (394), (395) имеют простой физический смысл. Для определенности будем говорить о скалярном потенциале φ . Выражение (176) для $\varphi(\vec{x})$ в статике получалось очень просто: малый элемент среды с объемом $d\vec{x}'$ вокруг точки $\vec{x}'$ понимается как точечный заряд $dQ(\vec{x}') = \rho(\vec{x}')d\vec{x}'$, дающий вклад $dQ(\vec{x}')/R$ с $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$ в потенциал $\varphi(\vec{x})$ в точке наблюдения $\vec{x}$, полный ответ — интеграл по $\vec{x}'$. В динамике, когда плотность заряда ρ зависит от времени, эта основная идея сохраняется, но теперь возникает вопрос: поскольку величина ρ в точке $\vec{x}'$ переменная, какое именно значение ρ нужно брать при вычислении потенциала $\varphi(t, \vec{x})$ в точке $\vec{x}$ в момент времени t ? Соотношение (394) дает ответ на этот вопрос: нужно брать значение $\rho(t', \vec{x}')$ не в момент наблюдения потенциала $t' = t$, а в некоторый предшествующий момент времени $t' = t - R/c$ с $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Разность $t - t' = R/c$ — время хода света от рассматриваемого элемента заряда в точке $\vec{x}'$ до точки наблюдения потенциала $\vec{x}$.

В этом и состоит суть идеи запаздывания, сводящейся к учету конечности скорости распространения любого сигнала, в данном случае, — электромагнитного поля (света): изменение источника в точке $\vec{x}'$ отражается на потенциале в точке $\vec{x}$ не мгновенно, а с некоторой задержкой, равной времени хода сигнала от точки $\vec{x}'$ до точки $\vec{x}$. Это специфика релятивистской теории, — механика Галилея и Ньютона допускает “идею дальнего действия”, т. е. мгновенного воздействия любого события в точке $\vec{x}'$ на результаты наблюдений в точке $\vec{x}$.

Все сказанное выше о скалярном потенциале φ в равной степени относится, конечно, и к векторному потенциалу $\vec{A}$.

4.4 Поле произвольным образом движущегося точечного заряда. Потенциалы Льенара — Вихерта. Мощность излучения и диаграмма направленности

Общие соображения. Пусть точечный заряд e движется по заданной траектории $\vec{r}(t)$ и мы хотим найти создаваемое им поле. В принципе, здесь нет никаких проблем: соответствующие объемные плотности заряда и тока известны из соотношений (146), их нужно подставить в общие формулы запаздывающих потенциалов (394), (395) и вычислить соответствующие интегралы.

Но следует отметить, что в самой постановке задачи “траектория фиксирована, поле ищется” уже содержится элемент идеализации: на самом деле поле и заряд — две взаимодействующие и поэтому влияющие друг на друга подсистемы. В точной постановке это очень сложная задача, обсуждение которой (в частности, силы реакции излучения, ее влияния на траекторию частицы и т. п.) в рамках данного краткого курса невозможно. Это проблемы, находящиеся уже где-то на грани области применимости классической электродинамики. Их краткое обсуждение было бы профанацией, а подробное и серьезное — нецелесообразно при нашем отборе материала. Мы уже говорили об этом в п. 2.17 при обсуждении движения заряженной частицы в заданном внешнем поле. Там тоже была идеализация: “поле фиксировано, траектория ищется”, а сейчас наоборот — “траектория задана, поле ищется”. Такие упрощенные варианты постановки задачи также имеют смысл и практические применения.

Итак, возвращаемся к началу: заряд e движется по заданной траектории $\vec{r}(t)$ и нас интересует создаваемое им поле. Будем сначала рассматривать скалярный потенциал φ , обобщение на векторный потенциал $\vec{A}$ будет тривиальным. Если подставить в формулу запаздывающих потенциалов (354) известное из (146) выражение $\rho(t, \vec{x}) = e\delta(\vec{x} - \vec{r}(t))$ для объемной плотности заряда, получим:

$$\varphi(t, \vec{x}) = e \int d\vec{x}' R^{-1} \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t')) \Big|_{t'=t-R/c, R=|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad (396)$$

На первый взгляд кажется, что все хорошо: в (396) входит трехмерная δ -функция, которая может снять интеграл по трехмерной переменной $\vec{x}'$

по правилу (145). Воспроизведем его здесь для удобства читателя:

$$\int dx f(x) \delta(x - a) = f(a) \quad (397)$$

для переменных x , a любой размерности.

Но в действительности все не так просто: мы не можем воспользоваться в (396) правилом интегрирования (397), так как аргумент δ -функции в (396) является некоторой сложной функцией переменной интегрирования $\vec{x}'$, которая входит в этот аргумент как явно, так и неявно через $t' = t - R/c = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$.

Тем самым мы сталкиваемся с проблемой: как вычислять интегралы типа

$$\int dx f(x) \delta[F(x)] \quad (398)$$

со “сложной δ -функцией”, аргумент которой — нетривиальная функция переменной интегрирования?

Мы приведем ниже ответ на этот вопрос, но сначала преобразуем выражение для $\varphi(t, \vec{x})$. При получении формулы (396) мы подставили плотность заряда $\rho(t, \vec{x}) = e\delta(\vec{x} - \vec{r}(t))$ в (394). В данной конкретной задаче удобнее сделать такую подстановку в исходный интеграл (393), что дает

$$\varphi(t, \vec{x}) = e \int d\vec{x}' \int dt' R^{-1} \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t')) \delta(t - t' - R/c) \Big|_{R=|\vec{x}-\vec{x}'|}. \quad (399)$$

В этом интеграле можно сначала выполнить трехмерное интегрирование по $\vec{x}'$ по простому правилу (397). Важно, что на этом этапе не возникает проблемы “ δ -функции со сложным аргументом”: при фиксированном значении t' величина $\vec{r}(t')$ в аргументе трехмерной δ -функции — некоторый фиксированный трехмерный вектор, аналогичный a в (397).

После интегрирования по $\vec{x}'$ в (399) получим:

$$\varphi(t, \vec{x}) = e \int dt' R^{-1} \delta(t - t' - R/c) \Big|_{R=|\vec{x}-\vec{r}(t')|}. \quad (400)$$

Подчеркнем, что после “снятия” интегрирования по $\vec{x}'$ в (399) по правилу (397) изменяется вид R : аргумент $\vec{x}'$ в исходном выражении $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$ заменяется на $\vec{r}(t')$.

При вычислении интеграла (400) мы опять сталкиваемся с проблемой “сложной δ -функции”: переменная интегрирования t' входит в аргумент

δ -функции в (400) как явно, так и неявно через $R = |\vec{x} - \vec{r}(t')|$. Но теперь это проблема в одномерном интеграле, а не в трехмерном, как в (396), — в этом и состоит выигрыш при переходе от представления (396) к представлению (400).

Вычисление интегралов со “сложной δ -функцией”. Рассмотрим интеграл типа (398) с одномерной переменной x , функцию $F(x)$ будем считать гладкой. Основная идея вычисления очень проста: если сделать в (398) замену переменной $x \rightarrow y = F(x)$, то “сложная δ -функция” $\delta[F(x)]$ превратится в простую $\delta(y)$ и интеграл по y можно вычислять по стандартному правилу (397) с учетом якобиана замены dx/dy .

Но эта процедура требует уточнений. В терминах переменной y функция $\delta(y)$ сосредоточена в точке $y = 0$, которой в терминах переменной x соответствуют “корни” функции $F(x)$, т. е. те точки x_i , в которых $F(x_i) = 0$. Во избежание ненужных осложнений будем считать все корни “простыми”: это значит, что функция F в каждом из корней имеет нуль первого порядка и ее производная в этой точке конечна и отлична от нуля. Если функция F монотонна, она не может иметь более одного корня, т. е. или один, или ни одного, в последнем случае интеграл (398) равен нулю. В общем случае немонотонной функции F ее область определения (вещественная ось) можно разбить на участки, в каждом из которых она монотонна и поэтому имеет не более одного корня. Полный ответ — сумма вкладов от всех этих участков монотонности.

Рассмотрим вклад от одного из таких участков. Если внутри него нет корня $F(x)$, то ответ равен нулю. Допустим теперь, что корень есть и что функция F на данном участке монотонно возрастает. Тогда после замены $x \rightarrow y = F(x)$ от вклада данного участка в (398) получим:

$$\int dx f(x) \delta[F(x)] = \int dy [dx/dy] f(x) \delta(y) = [dx/dy] f(x) \Big|_{y=0}, \quad (401)$$

где переменная x понимается как функция от y , определенная неявно соотношением $y = F(x)$. Мы не уточняем пределы интегрирования по y в (401), поскольку их конкретные значения роли не играют. Важно лишь то, что для монотонно возрастающей функции F сохраняется “нормальный порядок” пределов интегрирования по y (нижний предел меньше верхнего), и что внутри данной области есть точка $y = 0$, соответствующая некоторому корню $x = x_0$ функции $F(x)$.

В правой части (401) можно вернуться к языку переменной x : точке $y = 0$ соответствует корень $x = x_0$ функции $F(x)$ и

$$dx/dy = [dy/dx]^{-1} = [dF(x)/dx]^{-1}. \quad (402)$$

Подстановка выражения (402) в правую часть (401) с заменой условия $y = 0$ на $x = x_0$ дает искомый ответ для вклада данного участка.

Допустим теперь, что в рассматриваемом участке корень есть, но функция $F(x)$ на нем монотонно убывает. Тогда в интеграле по y в (401) якобиан dx/dy будет отрицательным, а порядок пределов интегрирования по y будет "неправильным" (нижний предел больше верхнего). Тогда эти пределы нужно переставить (чтобы пользоваться простой формулой (397)), что дает лишний множитель -1 , превращающий якобиан dx/dy в его модуль $|dx/dy|$, т. е. все изменения сводятся к замене величины (402) ее модулем.

В итоге получаем следующее общее правило:

$$\int dx f(x) \delta[F(x)] = \sum_i |dF(x)/dx|^{-1} f(x) \Big|_{x=x_i} \quad (403)$$

с суммированием по всем корням x_i функции $F(x)$.

Потенциалы Льенара — Вихерта. Воспользуемся правилом (403) для вычисления интеграла по t' в (400). Изменив для удобства общий знак в аргументе δ -функции в (400) (что возможно ввиду ее четности), будем записывать эту δ -функцию в виде $\delta[F(t')]$, где

$$F(t') = t' - t + R/c, \quad R \equiv |\vec{R}|, \quad \vec{R} \equiv \vec{x} - \vec{r}(t'). \quad (404)$$

Вычислим производную:

$$dF(t')/dt' = 1 + c^{-1}(\partial R/\partial t') = 1 + c^{-1}(\partial R/\partial r_i(t'))(dr_i(t')/dt').$$

По определению, $dr_i(t')/dt' = v_i(t')$, а для R из (404) с помощью справочной формулы (192) находим $\partial R/\partial r_i(t') = -\partial R/\partial x_i = -n_i$, где $n_i \equiv R_i/R$. Учитывая все это, получаем:

$$dF(t')/dt' = 1 - (\vec{n}\vec{\beta}), \quad \text{где } \vec{\beta} \equiv \vec{v}/c, \quad \vec{n} \equiv \vec{R}/R. \quad (405)$$

Все величины берутся в момент времени t' .

Поскольку $|\vec{\beta}| < 1$ и $|\vec{n}| = 1$, производная (405) строго положительна, следовательно, $F(t')$ — строго монотонно возрастающая функция. Отсюда следует, что "уравнение запаздывания"

$$F(t') = t' - t + R/c = t' - t + |\vec{x} - \vec{r}(t')|/c = 0 \quad (406)$$

имеет не более одного корня, т. е. решения $t' = t'(t, \vec{x})$.

Покажем теперь, что при разумных предположениях о поведении траектории $\vec{r}(t)$ корень существует. Будем считать “разумным предположением” условие $|\vec{r}(t)| < \text{const}$, т. е. траектория находится внутри некоторой ограниченной области. Тогда при фиксированном $\vec{x}$ можно считать $R < \text{const}$, так что асимптотика функции $F(t')$ при $t' \rightarrow \pm\infty$ определяется ее первым слагаемым: $F(t') = t' + \text{const}$. Отсюда следует, что $F(t') \rightarrow +\infty$ при $t' \rightarrow +\infty$ и $F(t') \rightarrow -\infty$ при $t' \rightarrow -\infty$, поэтому где-то внутри интервала $\pm\infty$ функция $F(t')$ должна менять знак, т. е. обращаться в нуль. Координата t' этой точки и есть решение уравнения запаздывания (406).

Таким образом, при вычислении интеграла (400) по правилу (403) у нас есть вклад только одного корня — решения уравнения запаздывания (406). Аргументом δ -функции является $F(t')$, ее производная известна из соотношения (405), поэтому для интеграла (400) по правилу (403) получаем:

$$\varphi(t, \vec{x}) = e/\alpha R, \quad \text{где} \quad (407)$$

$$\alpha = 1 - (\vec{n}\vec{\beta}), \quad \vec{\beta} = \vec{v}(t')/c, \quad \vec{n} = \vec{R}/R, \quad R \equiv |\vec{R}|, \quad \vec{R} \equiv \vec{x} - \vec{r}(t'),$$

а под t' понимается решение $t' = t'(t, \vec{x})$ уравнения запаздывания (406).

Аналогичная формула для векторного потенциала получается стандартной заменой $\varphi \rightarrow \vec{A}$, $\rho \rightarrow \vec{j}/c$, плотность тока $\vec{j}$ (146) для точечной частицы отличается от ρ лишь дополнительным множителем $\vec{v}$. Поэтому выражение для векторного потенциала получается просто домножением на $\vec{v}/c \equiv \vec{\beta}$ скалярного потенциала (407):

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = e\vec{\beta}/\alpha R \quad (408)$$

с теми же обозначениями, как и в (407).

Выражения (407), (408) — искомые окончательные ответы для потенциалов поля произвольным образом движущегося точечного заряда, их называют “потенциалами Льепа — Вихерта”.

Напряженности. При известных потенциалах напряженности вычисляются по стандартным формулам (13):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - c^{-1}\partial_t\vec{A}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (409)$$

Никаких принципиальных проблем здесь нет, нужно лишь уметь вычислять производные потенциалов по их аргументам $t, \vec{x}$. Но для наших потенциалов (407), (408) эти вычисления довольно громоздкие,

так как зависимость от $t, \vec{x}$ входит и неявно через переменную $t'(t, \vec{x})$ — решение уравнения запаздывания (406). Поэтому первый шаг — вычисление производных $\partial_t t'$ и $\partial_i t'$ с $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ дифференцированием равенства (406), затем следуют прямолинейные, но довольно громоздкие (в подробной записи — на пару страниц) выкладки. В них нет ничего нового и поучительного с точки зрения нашего предмета — электродинамики. Поэтому мы просто приведем конечный результат такого расчета напряженностей (любой желающий может выполнить его самостоятельно):

$$\vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}], \quad (410)$$

$$\vec{E} = \frac{e(1 - \beta^2)}{R^2 \alpha^3} (\vec{n} - \vec{\beta}) + \frac{e}{cR\alpha^3} [\vec{n}[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]] \quad (411)$$

с обозначениями (407) и $\dot{\vec{\beta}} \equiv d\vec{\beta}(t')/dt' = \dot{\vec{v}}(t')/c$. Все величины в ответах зависят от аргумента $t'(t, \vec{x})$, определяемого из условия запаздывания (406).

В соотношении (411) входят два существенно различных вклада: первый зависит только от $\vec{\beta} \equiv \vec{v}/c$ (т. е. от скорости) и убывает на бесконечности как $1/R^2$, а второй содержит $\dot{\vec{\beta}} \equiv \dot{\vec{v}}/c$ (т. е. ускорение) и убывает как $1/R$. По первому вкладу определяется, в частности, поле равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда, о котором говорилось в конце п. 2.14. Ниже будет показано, что излучение движущегося заряда определяется только вторым вкладом в (411), который порождается ускорением и убывает как $1/R$.

Мощность излучения и диаграмма направленности, общие формулы. Приведем сначала общие формулы, определяющие интенсивность излучения любого локализованного (т. е. сосредоточенного в некоторой конечной области пространства V) источника. Затем мы применим их к нашему случаю движущейся точечной частицы, считая ее также локализованным источником, другими словами, предполагая, что тот участок траектории частицы $\vec{r}(t)$, где есть ускорение и, как следствие, излучение, содержится внутри некоторой конечной области V .

Итак, пусть есть некоторые локализованные в объеме V источники и мы умеем вычислять создаваемое ими поле, т. е. напряженности $\vec{E}$, $\vec{H}$, а по ним — соответствующий вектор плотности потока энергии $\vec{S} = (c/4\pi)[\vec{E} \times \vec{H}]$.

Введем понятие “интенсивности излучения $I(\vec{n})$ в направлении $\vec{n}$ ”: по определению, $I(\vec{n})$ есть количество излучаемой энергии, уходящей

на бесконечность за единицу времени в единицу телесного угла вокруг заданного направления $\vec{n}$.

Чтобы получить конкретное выражение для $I(\vec{n})$, представим себе сферу с центром в начале координат, помещенном где-нибудь внутри излучающей системы, и с очень большим по сравнению с размером системы радиусом R . Пусть $\vec{x}$ — произвольная точка на поверхности сферы, $\vec{n} = \vec{x}/R$ — единичный вектор направления на эту точку. Выделим вокруг $\vec{n}$ некоторый бесконечно малый телесный угол $d\vec{n}$ (дифференциал телесного угла чаще обозначают через $d\Omega$, но мы будем использовать обозначение $d\vec{n} \equiv d\Omega$, более естественно связанное с обозначением $\vec{n}$ для направления). Этот малый телесный угол $d\vec{n}$ вырезает на поверхности сферы участок с площадью $d\sigma = R^2 d\vec{n}$. Поток энергии наружу через этот участок сферы есть произведение его площади $d\sigma = R^2 d\vec{n}$ на нормальную составляющую $\vec{S}_n$ вектора плотности потока энергии $\vec{S}$ в данной точке $\vec{x}$ на сфере, коэффициент при $d\vec{n}$ есть “поток в единицу телесного угла”.

Нас интересует энергия, уходящая на бесконечность, т. е. предел при $R \rightarrow \infty$ рассмотренной выше величины. Поэтому для искомой интенсивности излучения $I(\vec{n})$ получаем:

$$I(\vec{n}) = \lim_{R \rightarrow \infty} [R^2 \vec{S}_n], \quad (412)$$

предел $R \rightarrow \infty$ берется при фиксированном направлении $\vec{n}$. При этом в $\vec{S}_n$ и, как следствие, в $I(\vec{n})$ остается зависимость от времени наблюдения t , если оно считается фиксированным в процессе расширения сферы. Если эта зависимость медленная и плавная, то она так и сохраняется в ответе, и тогда $I = I(\vec{n}, t)$. Если же это периодическая зависимость, то под интенсивностью излучения $I(\vec{n})$ обычно понимается усредненная по времени величина, т. е. в (412) сначала выполняется усреднение по времени и уже потом — предел $R \rightarrow \infty$. Уточнение определения (412) для движущейся заряженной частицы будет приведено ниже.

По физическому смыслу величина $dP(\vec{n}) = I(\vec{n})d\vec{n}$ есть мощность излучения на бесконечность в малый телесный угол $d\vec{n}$ вокруг заданного направления $\vec{n}$. Полная мощность излучения P по всем направлениям есть

$$P = \int dP(\vec{n}) = \int d\vec{n} I(\vec{n}). \quad (413)$$

Соотношения (412) и (413) — основные формулы для интенсивности излучения любого локализованного источника.

Угловая зависимость интенсивности излучения определяется функцией $I(\vec{n})$. Во многих случаях она зависит только от одного угла θ и тогда угловую зависимость $I(\theta)$ можно представить в виде графика $I = I(\theta)$ в полярных координатах на плоскости (I — радиус в полярных координатах, θ — угол). Такой график наглядно представляет “диаграмму направленности излучения”, показывая, в каких направлениях излучение является наиболее сильным. Впоследствии мы приведем конкретные примеры таких диаграмм.

Интенсивность излучения точечного заряда. Вычислим интенсивность излучения (412) для нашего случая точечного заряда с напряженностями (410), (411). Источник излучения, т. е. тот участок траектории, где имеется ускорение, будем считать локализованным, т. е. сосредоточенным внутри некоторой конечной области пространства V . Пусть $\vec{x}$ — точка наблюдения, находящаяся на поверхности очень большой по сравнению с размером излучающей системы сферы с центром в начале координат, помещенном где-нибудь внутри области V . В формуле (412) радиус этой сферы обозначался через R , но теперь мы хотим сохранить обозначения (407): $\vec{R} = \vec{x} - \vec{r}(t')$, $R = |\vec{R}|$, $\vec{n} = \vec{R}/R$, где $\vec{r}(t')$ — положение заряда на своей траектории в момент t' . Поэтому для самой точки $\vec{x}$ введем обозначения $|\vec{x}| = R_0$, $\vec{x}/R_0 = \vec{n}_0$ и при использовании формулы (412) будем иметь в виду предел $R_0 \rightarrow \infty$ при фиксированном $\vec{n}_0$. Все эти уточнения мы приводим только ради строгости изложения. Ясно, что для очень больших расстояний R_0 любой локализованный источник представляется наблюдателю на сфере точечным и тогда различием между величинами R_0 , $\vec{n}_0$ и R , $\vec{n}$ можно пренебречь, считая их одинаковыми.

Каждая из двух напряженностей (410), (411) содержит вклады порядка $1/R^2$ и $1/R$, поэтому соответствующий вектор плотности потока энергии $\vec{S} = (c/4\pi)[\vec{E} \times \vec{H}]$ содержит вклады порядка $1/R^4$, $1/R^3$ и $1/R^2$. Ясно, что при подстановке в (412) в пределе $R_0 \cong R \rightarrow \infty$ выживает лишь кратный $1/R^2$ вклад в $\vec{S}$, который порождается только вторым слагаемым в (411) и соответствующим ему вкладом в (410). Поэтому с этого момента мы будем понимать под $\vec{E}$ только второе слагаемое в (411), а $\vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}]$ с данным $\vec{E}$ согласно (410). Из (411) видно, что для данного вклада $\vec{E} \perp \vec{n}$.

По $\vec{E}$ и $\vec{H}$ находим вектор плотности потока энергии:

$$\vec{S} = (c/4\pi)[\vec{E} \times \vec{H}] = (c/4\pi)[\vec{E}[\vec{n} \times \vec{E}]] = (c/4\pi)E^2\vec{n}. \quad (414)$$

Мы воспользовались формулой “БАЦ—ЦАБ”: $[\vec{E}[\vec{n} \times \vec{E}]] = \vec{n}E^2 - \vec{E}(\vec{n}\vec{E})$, второе слагаемое исчезает в силу ортогональности $\vec{E} \perp \vec{n}$.

Из (414) следует, что вектор $\vec{S}$ направлен по $\vec{n}$, поэтому его нормальная составляющая $\vec{S}_n$ — просто коэффициент при $\vec{n}$ в (414).

Теперь подставим это выражение для $\vec{S}_n$ в (412), считая $R = R_0$. У нас $\vec{E} \propto 1/R$, поэтому $\vec{S}_n \propto 1/R^2$ и эти явные степени R в (412) сокращаются. Но это еще не означает, что мы нашли искомый предел $R \rightarrow \infty$, поскольку в $\vec{S}_n \propto E^2$ содержится еще и неявная зависимость от R через входящую в $\vec{E}$ переменную t' , определяемую из условия запаздывания (406). Поэтому смысл символа “lim” в (412) для данной задачи нуждается в уточнении, чем мы сейчас и займемся.

Пусть $\vec{x}$ — “точка наблюдения” на нашей большой сфере, t — момент времени наблюдения. Входящие в $\vec{E}$ величины $\vec{\beta}$ и $\dot{\vec{\beta}}$ берутся, по условию, в момент времени t' , который определяется по $\vec{x}$ и t из условия запаздывания (406): $t - t' = R/c = |\vec{x} - \vec{r}(t')|/c$ при заданной траектории $\vec{r}(t)$, тем самым $t' = t'(t, \vec{x})$. Если мы положим $\vec{x} = R_0 \vec{n}_0$ и будем рассматривать предел $R_0 \rightarrow \infty$ при фиксированных значениях $\vec{n}_0$ и t , то величина $t'(t, \vec{x})$ (тем самым и положение частицы на траектории) при изменении R_0 будет непрерывно меняться, так что неясно, существует ли вообще такой предел.

Поэтому более естественной является другая предельная процедура, в которой при расширении сферы фиксированным считается не время наблюдения t , а “время излучения” t' . Тогда переменной становится величина t , определяемая из условия $t = t' + |\vec{x} - \vec{r}(t')|/c = t' + R/c$, в котором $\vec{x} = R_0 \vec{n}_0$, $R_0 \rightarrow \infty$, вектор $\vec{n}_0$ фиксирован и в пределе совпадает с $\vec{n}$. Ответ для интенсивности излучения $I(\vec{n})$ будет тогда зависеть от двух независимых переменных: направления излучения $\vec{n}$ ($= \vec{n}_0$) и времени излучения t' , по которому однозначно определяется положение частицы на траектории $\vec{r}(t')$ и соответствующие значения $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t')$ и $\dot{\vec{\beta}} = \dot{\vec{\beta}}(t')$.

Имея в виду именно эту предельную процедуру, при подстановке известного из (414) значения $\vec{S}_n$ в (412) получаем:

$$I(\vec{n}) = \lim_{R \rightarrow \infty} [R^2 \vec{S}_n] = \lim_{R \rightarrow \infty} [c R^2 E^2 / 4\pi]. \quad (415)$$

Понимая под $\vec{E}$ второе слагаемое (411), имеем:

$$I(\vec{n}) = (e^2 / 4\pi c \alpha^6) \|\vec{n}[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]\|^2. \quad (416)$$

Независимыми переменными этой величины являются направление излучения $\vec{n}$ и время излучения t' , являющееся аргументом величин $\vec{\beta}$ и $\dot{\vec{\beta}}$. Зависимость I от t' в (416) и далее явно не указывается, но подразумевается.

Соотношение (416) — окончательный ответ для интенсивности излучения в заданном направлении $\vec{n}$ произвольным образом движущегося точечного заряда, излучающего в заданный момент времени t' .

Частные случаи. Выражение (416) зависит от трех векторов $\vec{n}$, $\vec{\beta}$ и $\dot{\vec{\beta}}$, следовательно, от трех независимых углов между ними. Более детальное обсуждение этого общего выражения не имеет смысла, — ответ дается формулой (416), которую всегда можно конкретизировать при наличии любой дополнительной информации.

Мы рассмотрим здесь следующие два частных случая:

1. Нерелятивистская частица, для которой $\beta \equiv |\vec{\beta}| \ll 1$.

2. “Коллинеарное движение” с $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ при любом $\beta \equiv |\vec{\beta}| < 1$.

Их общей чертой является то, что в векторном произведении $[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]$ в (416) можно отбросить вклад $\vec{\beta}$: в нерелятивистском случае — ввиду его малости по сравнению с единичным вектором $\vec{n}$, а в случае “коллинеарных” $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ их векторное произведение равно нулю.

Итого, для этих двух случаев выражение (416) упрощается следующим образом:

$$I(\vec{n}) = (e^2/4\pi c \alpha^6) \|\vec{n}[\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}]\|^2. \quad (417)$$

Используя здесь формулу “БАЦ—ЦАВ”, имеем $[\vec{n}[\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}]] = \vec{n}(\vec{n}\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}$, откуда для квадрата этого вектора получаем $\|\vec{n}[\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}]\|^2 = |\vec{n}(\vec{n}\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}|^2 = (\vec{n}\dot{\vec{\beta}})^2 - 2(\vec{n}\dot{\vec{\beta}})^2 + \dot{\vec{\beta}}^2 = \dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{n}\dot{\vec{\beta}})^2$. Подстановка этого выражения в (417) дает

$$I(\vec{n}) = (e^2/4\pi c \alpha^6) [\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{n}\dot{\vec{\beta}})^2]. \quad (418)$$

Эта формула справедлива для обоих обсуждаемых случаев, далее рассматриваем их отдельно.

1. *Нерелятивистская частица* с $\beta \equiv |\vec{\beta}| \ll 1$. В этом случае в $\alpha = 1 - (\vec{n}\dot{\vec{\beta}})$ из (407) можно пренебречь вкладом $(\vec{n}\dot{\vec{\beta}})$, положив $\alpha = 1$. Тогда вся угловая зависимость величины (418) определяется выражением в квадратной скобке (418), которое равно $\dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \theta$, где θ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\dot{\vec{\beta}}$, знак “—” у квадратов векторов опускаем. Итого, в данном случае

$$I(\vec{n}) = (e^2 \dot{\vec{\beta}}^2 / 4\pi c) \sin^2 \theta, \quad (419)$$

где θ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\dot{\vec{\beta}}$.

Проинтегрировав выражение (419) по $\vec{n}$ (т. е. по углам θ и φ), для полной мощности излучения (413) получим “формулу Лармора”:

$$P = \int d\vec{n} I(\vec{n}) = 2e^2 \dot{\beta}^2 / 3c. \quad (420)$$

2. Коллинеарные $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ при любом $\beta \equiv |\vec{\beta}| < 1$. В этом случае уже нельзя пренебрегать вкладом $(\vec{n}\vec{\beta})$ в $\alpha = 1 - (\vec{n}\vec{\beta})$. Пусть θ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{\beta}$, а θ' — угол между векторами $\vec{n}$ и $\dot{\vec{\beta}}$. Если $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ и эти два вектора направлены в одну сторону, то $\theta' = \theta$, а если в противоположные стороны — то $\theta' = \pi - \theta$. Сразу отметим, что в обоих случаях $\sin \theta' = \sin \theta$. В таких обозначениях $\alpha = 1 - (\vec{n}\vec{\beta}) = 1 - \beta \cos \theta$, а выражение в квадратной скобке (418) есть $\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta' = \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta$, так как для обоих вариантов ($\theta' = \theta$ или $\theta' = \pi - \theta$) $\sin^2 \theta' = \sin^2 \theta$.

Итого, в данном случае:

$$I(\vec{n}) = (e^2 \dot{\beta}^2 / 4\pi c) (1 - \beta \cos \theta)^{-6} \sin^2 \theta, \quad (421)$$

где θ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{\beta}$, т. е. между направлением излучения и вектором скорости.

Обсудим теперь соответствующие диаграммы направленности, представляя угловую часть выражений (419), (421) в виде графика $r = r(\theta)$ в полярных координатах на плоскости. Для нерелятивистской частицы из (419) имеем $r \equiv r_1(\theta) = \sin^2 \theta$, где θ — угол между направлением излучения и направлением вектора ускорения, график функции $r_1(\theta) = \sin^2 \theta$ показан на рис. 4.1. По графику видно, что максимум излучения в этом случае соответствует углу $\theta = \pi/2$, т. е. “вбок от ускорения”. При этом показанный на рис. 4.1 график нужно еще мысленно “раскрутить” вокруг направления вектора $\dot{\vec{\beta}}$ ввиду независимости ответа от соответствующего угла поворота φ , т. е. излучение максимально в плоскости, ортогональной вектору ускорения $\dot{\vec{\beta}}$.

Обсудим теперь угловую зависимость в (421). Ее можно представить в виде произведения $r(\theta) = r_1(\theta)r_2(\theta)$, где $r_1(\theta) = \sin^2 \theta$ — тот же множитель, что и в (419), а $r_2(\theta) = (1 - \beta \cos \theta)^{-6}$, где θ — угол между направлением излучения $\vec{n}$ и вектором скорости $\vec{\beta}$.

Рассмотрим сначала множитель $r_2(\theta) = (1 - \beta \cos \theta)^{-6}$ отдельно. Положив для определенности $\beta = 1/2$ (т. е. v — половина скорости света), при таком значении β имеем $r_2(0) = 2^6 = 64$, $r_2(\pi/2) = 1$, $r_2(\pi) = (2/3)^6 \ll 1$.

График функции $r_2(\theta)$ приведен на рис. 4.2, но, конечно, в другом масштабе, чем на рис. 4.1, так как там максимальное значение r равно 1, а на рис. 4.2 — 64 (вперед по скорости).

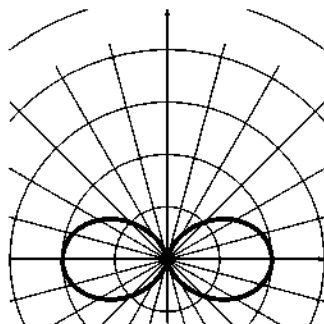


Рис. 4.1. График функции $r_1(\theta) = \sin^2 \theta$ в полярных координатах

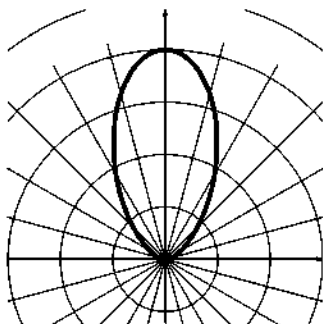


Рис. 4.2. График функции $r_2(\theta) = (1 - \beta \cos \theta)^6$ в полярных координатах

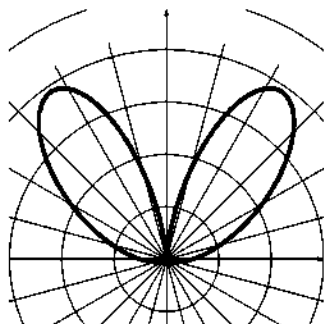


Рис. 4.3. Диаграмма направленности для выражения (421) определяется произведением $r(\theta) = r_1(\theta)r_2(\theta)$

Диаграмма направленности для выражения (421) определяется произведением $r(\theta) = r_1(\theta)r_2(\theta)$ и показана на рис. 4.3. Основной вклад дается множителем $r_2(\theta)$ (см. рис. 4.2), а роль $r_1(\theta) = \sin^2 \theta$ (см. рис. 4.1) сводится к подавлению излучения “прямо вперед” ($\theta = 0$) и “прямо назад” ($\theta = \pi$) по отношению к направлению скорости. Все показанные на рисунках графики нужно еще мысленно “раскрутить” вокруг выделенной оси ввиду независимости ответов от соответствующего угла поворота φ . Поэтому для графика на рис. 4.1 излучение максимально в ортогональной вектору ускорения плоскости, а для графика на рис. 4.3 максимум излучения соответствует конусу с некоторым малым (при больших β) углом раствора θ_0 , который можно найти из условия максимума функции $r(\theta)$; величина θ_0 уменьшается с ростом скорости $\beta = v/c$.

Резюмируем кратко сказанное выше, отвечая на вопрос: “куда в основном излучает движущийся с ускорением заряд”? Ответы таковы: для нерелятивистского движения — “вбок от ускорения”, а для релятивистского с коллинеарными $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ — “в конус вперед по скорости”.

Заключительное замечание. Мы определяли интенсивность излучения I как количество энергии, уходящее на бесконечность в единицу телесного угла в заданном направлении за единицу времени наблюде-

ния t . Часто (см., например, [1]) основной характеристикой интенсивности излучения считается количество энергии, которое теряет заряд за единицу его “собственного времени на траектории” t' , связанного с t условием запаздывания (406). Из соотношения (406) нетрудно найти связь между dt и dt' при фиксированном $\vec{x}$, а именно: $dt = \alpha dt'$ с α из (407) (предлагаем читателю получить эту формулу самостоятельно). Поэтому при пересчете мощности от t к t' появляется дополнительный множитель α , так что в общей формуле (416) и всюду далее множитель α^{-6} заменяется на α^{-5} . Для нерелятивистского движения с $\alpha \cong 1$ эта замена вообще несущественна, а при больших скоростях она изменяет лишь численные значения величин без изменения показанной на рис. 4.3 качественной картины диаграммы направленности.

4.5 Излучение локализованных источников, мультипольное разложение

Постановка задачи, основные соотношения. Пусть дана некоторая локализованная (т. е. сосредоточенная в конечной области пространства V) система зависящих от времени источников $\rho, \vec{j}$ и мы хотим найти создаваемое этой системой поле вдали от нее. Аналогичная задача в статике решалась с помощью мультипольного разложения (п. 3.3), параметром малости в котором было отношение размера системы к расстоянию до точки наблюдения. Тогда мы вычисляли не только главный член, но и все поправки к нему по данному параметру малости. Теперь будет иначе, поскольку в задачу войдет еще один “характерный размер” — длина волны излучения λ , а параметром мультипольного разложения будет отношение размера системы к этой длине волны λ . В дальнейших расчетах принимается следующее *соглашение*: отношение размера излучающей системы к расстоянию до точки наблюдения всегда считается очень малым и все поправки порядка этого отношения в конечных ответах отбрасываются. Это естественно для задач радиотехники, в которых излучающая система — антенна, а ее сигнал принимается в другом городе или на другом континенте.

Переход к гармоническим источникам. Любую “достаточно хорошую” по переменной t функцию $F(t, \vec{x})$ можно представить в виде интеграла

Фурье по частоте ω :

$$F(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \bar{F}(\omega, \vec{x}) \exp(-i\omega t). \quad (422)$$

Допустим, что источники $\rho, \vec{j}$ допускают представление типа (422). *Определение:* функции вида $F(t, \vec{x}) = F(\vec{x}) \exp(-i\omega t)$ с заданной частотой ω будем называть “гармонически зависящими от времени” или просто “гармоническими” (последний термин используется и для статических решений уравнения Лапласа, но в этой части курса они встречаться не будут). Не зависящий от времени коэффициент при гармонике $\exp(-i\omega t)$ в правой части называют амплитудой рассматриваемой величины. Ее удобно обозначать той же буквой, что и саму величину, различая их лишь аргументами ($t, \vec{x}$ у полной функции и $\vec{x}$ у ее амплитуды).

Интеграл Фурье (422) — суперпозиция гармонических функций с разными частотами. Ввиду линейности волновых уравнений (349) для них справедлив принцип суперпозиции: “поле от суммы источников есть сумма создаваемых каждым из них полей”. Поэтому мы можем существенно упростить нашу задачу, решая ее для частного случая гармонических источников $\rho, \vec{j} \propto \exp(-i\omega t)$ с заданной частотой ω . Ниже будет показано, что для гармонических источников создаваемые ими поля также будут гармоническими. Окончательный ответ для источников типа (422) будет получаться интегрированием по частоте ω с заданным (источниками) весом решений, получаемых для гармонических $\rho, \vec{j}$.

Важным частным случаем являются периодические по времени источники, которые разлагаются не в интеграл, а в ряд Фурье с дискретным набором частот. Самый простой случай — гармонические источники с одной заданной частотой ω , например, линейный гармонический осциллятор или заряженная частица, совершающая круговое движение с заданной частотой ω .

Отметим, что источники $\rho, \vec{j}$, разумеется, вещественны, но при этом амплитуды их фурье-образов в общем случае комплексны и удовлетворяют соотношению

$$\bar{F}(-\omega, \vec{x}) = \bar{F}^*(\omega, \vec{x}) \quad (423)$$

для вещественной функции $F(t, \vec{x})$ в (422), знак “*” — комплексное сопряжение.

Связь между $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Итак, пусть наши источники $\rho, \vec{j}$ гармонические, т. е. зависят от времени только посредством множителя $\exp(-i\omega t)$ с заданной частотой ω . Как уже говорилось, тогда будут гармоническими и создаваемые источниками поля (доказательство ниже). Всюду в дальнейшем будем считать, что $\omega > 0$, ответы для $\omega < 0$ получаются с помощью соотношения (423).

Напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вне излучающей системы удовлетворяют уравнениям Максвелла (1)–(4) с нулевыми источниками, в частности,

$$\text{rot } \vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{H} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} - c^{-1} \partial_t \vec{E} = 0. \quad (424)$$

Для любых гармонических функций производную ∂_t можно, очевидно, заменить простым числовым множителем $-i\omega$. Выполнив эту замену в (424), получаем:

$$\vec{H} = -ik^{-1} \text{rot } \vec{E}, \quad \vec{E} = ik^{-1} \text{rot } \vec{H}, \quad k \equiv \omega/c. \quad (425)$$

Таким образом, для гармонических источников вне излучающей системы по одной из напряженностей $\vec{E}$ или $\vec{H}$ можно найти вторую, введенный в (425) параметр $k \equiv \omega/c$ — “волновое число”, связанное с длиной волны излучения λ соотношением $k = 2\pi/\lambda$. Равенства (425) справедливы как для самих напряженностей, так и для их амплитуд, поскольку общий множитель $\exp(-i\omega t)$ можно, при желании, сократить.

Общая схема расчета. Исходная точка — формулы запаздывающих потенциалов (394), (395), при этом для гармонических источников достаточно вычислить лишь векторный потенциал $\vec{A}$ (395). По нему находим $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$, затем по $\vec{H}$ с помощью соотношения (425) находится соответствующая напряженность $\vec{E}$ вне излучающей системы (только там она и нужна).

Итак, начинаем с формулы запаздывающих потенциалов (395) для $\vec{A}$, в которой для упрощения записи переобозначим $\vec{x}' \rightarrow \vec{y}$:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = c^{-1} \int d\vec{y} R^{-1} \vec{j}(t', \vec{y}) \Big|_{t'=t-R/c, R=|\vec{x}-\vec{y}|}. \quad (426)$$

Подставив сюда в качестве $\vec{j}$ гармонический источник $\vec{j}(t, \vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \exp(-i\omega t)$, получим:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = c^{-1} \int d\vec{y} R^{-1} \vec{j}(\vec{y}) \exp[-i\omega(t - R/c)] \Big|_{R=|\vec{x}-\vec{y}|}. \quad (427)$$

Множитель $\exp(-i\omega t)$ выносится за знак интеграла, остающееся выражение не зависит от t , т. е. мы получаем представление

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) \exp(-i\omega t),$$

доказывающее гармоничность векторного потенциала и, как следствие, получаемых по нему напряженностей. Для амплитуды векторного потенциала $\vec{A}(\vec{x})$ из соотношения (427) получаем:

$$\vec{A}(\vec{x}) = c^{-1} \int d\vec{y} R^{-1} \vec{j}(\vec{y}) \exp(ikR) \Big|_{R=|\vec{x}-\vec{y}|} \quad (428)$$

с $k \equiv \omega/c$ из (425). Выражение (428) — окончательный точный ответ для амплитуды векторного потенциала при любом гармоническом источнике $\vec{j}$. Все дальнейшее — упрощение и детальный анализ выражения (428).

Учет неравенства “размер системы $\ll r \equiv |\vec{x}|$ — расстояния до точки наблюдения”.

В начале раздела мы условились, что это неравенство всегда будет считаться выполненным, и что всеми поправками по этому “параметру малости” в конечных ответах мы будем пренебрегать.

Переменная интегрирования $\vec{y}$ в (428) пробегает по излучающей системе, ее размер $L_{\text{сист}}$, по определению, есть $\max|\vec{y}|$ в области интегрирования, и, по условию, $r \equiv |\vec{x}| \gg \max|\vec{y}| \equiv L_{\text{сист}}$. Разлагая величину $R = |\vec{x} - \vec{y}|$ по $\vec{y}$, получаем:

$$R = |\vec{x} - \vec{y}| = r - (\vec{n}\vec{y}) + \dots, \quad (429)$$

где $r \equiv |\vec{x}|$, $\vec{n} \equiv \vec{x}/r$, многоточие — следующие поправки.

Мы хотим подставить выражение (429) в (428), учитывая (по соглашению) лишь самый главный член ответа по параметру малости $L_{\text{сист}}/r$, где $L_{\text{сист}} \equiv \max|\vec{y}|$ и $r \equiv |\vec{x}|$. На первый взгляд кажется, что тогда нужно просто удержать первый член r в разложении (429), отбросив все поправки к нему. Для множителя R^{-1} в (428) это действительно верно, но с фазой kR в показателе экспоненты в (428) так поступить нельзя. Для пояснения перепишем выражение (428) с подстановкой (429) в фазе и с заменой $R^{-1} \rightarrow r^{-1}$ в предэкспоненте:

$$\vec{A}(\vec{x}) = (e^{ikr}/cr) \int d\vec{y} \vec{j}(\vec{y}) \exp[-ik(\vec{n}\vec{y}) + \dots]. \quad (430)$$

Первый вклад r в (429) порождает фазовый множитель $\exp(ikr)$, который выносится за знак интеграла, а поправки в (429) порождают экспоненту под знаком интеграла (430). Пренебрегая в (429) поправкой $\propto (\vec{n}\vec{y})$, мы тем самым заменяем экспоненту под знаком интеграла в (430) единицей. Ясно, что это законно только тогда, когда фаза $k(\vec{n}\vec{y})$ в (430) мала сама по себе, а не только по сравнению с первым вкладом kr в kR для разложения (429). Действительно, если остающаяся под знаком интеграла (430) периодическая функция $\exp[-ik(\vec{n}\vec{y}) + \dots]$ совершает много колебаний в пределах области интегрирования, то замена ее единицей означает “сто процентное” искажение ответа, а не просто отбрасывание малых поправок.

Ответ, получаемый заменой экспоненты под знаком интеграла в (430) единицей, называется *дипольным приближением*. Ясно, что это приближение заведомо справедливо только тогда, когда $|k(\vec{n}\vec{y})| \ll 1$. При учете соотношений $\max|\vec{y}| \equiv L_{\text{сист}}$ и $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны излучения, сказанное означает, что дипольное приближение справедливо для системы, размер которой много меньше длины волны λ . Если размер системы порядка длины волны λ , то вклад $k(\vec{n}\vec{y})$ в показателе экспоненты в (430) необходимо сохранять, хотя он и мал по сравнению с вкладом kr в kR от первого члена разложения (429).

Но это порождает естественный вопрос: не могут ли тогда быть существенными и следующие поправки, обозначенные в (429) многоточием? Ответ, в принципе, утвердительный: как бы ни была мала по сравнению с $(\vec{n}\vec{y})$ следующая поправка в (429), после ее умножения на $k = 2\pi/\lambda$ она может дать в фазу kR вклад порядка единицы для достаточно малой длины волны λ , т. е. для достаточно большой частоты ω . Но тогда основной вклад $k(\vec{n}\vec{y})$ в остающейся под знаком интеграла части kR будет очень большим, т. е. множитель $\exp[-ik(\vec{n}\vec{y})]$ в (430) будет очень быстро осциллирующим в пределах области интегрирования, что при любой гладкой амплитуде тока $\vec{j}(\vec{x})$ фактически приведет к исчезновению интеграла в (430), точнее, он будет очень малым. Поэтому для источников типа (422) эта область “сверхвысоких частот” будет подавленной и ею можно просто пренебречь при вычислении интеграла по частотам: основной вклад в ответ дает та область частот, для которых размер системы меньше или порядка длины волны λ .

Имея в виду именно эту область частот, всюду далее будем считать, что поправками в (429) можно пренебрегать. Отбрасывая их в (430), получаем:

$$\vec{A}(\vec{x}) = (e^{ikr}/cr) \int d\vec{y} \vec{j}(\vec{y}) \exp[-ik(\vec{n}\vec{y})]. \quad (431)$$

Это общепринятая “базовая формула” для амплитуды векторного потенциала, являющаяся основой всех дальнейших вычислений.

Мультипольное разложение векторного потенциала. Оно порождается разложением в ряд экспоненты под знаком интеграла в (431). Переходя к индексным обозначениям и опуская для сокращения записи знак “ $\rightarrow$ ” у всех трехмерных векторов (поскольку смысл всех величин ясен), из соотношения (431) получаем:

$$A_s(x) = (e^{ikr}/cr) \int dy j_s(y) [1 - ik(n_p y_p) + \dots]. \quad (432)$$

Ниже будет показано, что вклады разложения (432) выражаются через мультипольные моменты системы: вклад единицы в (432) порождается электрическим дипольным моментом, следующий приведенный в (432) член разложения порождается магнитным (дипольным) и электрическим квадрупольным моментами. Только этими вкладами мы и будем в дальнейшем ограничиваться. Напомним, что параметром малости в разложении (432) является отношение размера системы к длине волны λ .

Не зависящий от переменной интегрирования y множитель $-ikn_p$ с $n_p = x_p/r$ во втором слагаемом (432) можно вынести за знак интеграла, так что нам нужно вычислять величины $\int dy j_s(y)$ и $\int dy j_s(y) y_p$. Чтобы это сделать, выведем сначала некоторые вспомогательные соотношения.

Справочные формулы. Приводимые ниже выкладки являются фактически дословным обобщением на динамику статических соотношений (200)–(202). Исходная точка — динамическое уравнение непрерывности $\partial_t \rho + \text{div } \vec{j} = 0$, в котором для гармонических источников $\rho, \vec{j}$ можно сделать стандартную замену $\partial_t \rightarrow -i\omega$, что дает

$$i\omega \rho = \text{div } \vec{j} = \partial_k j_k \quad (433)$$

как для самих гармонических величин $\rho, \vec{j}$, так и для их амплитуд.

Пусть $F = F(y)$ — произвольная функция (y у нас будет только одна переменная y , поэтому аргумент y для всех функций будем опускать, а сим-

вол ∂_s будем понимать как $\partial/\partial y_s$). Тогда из (433) с помощью интегрирования по частям получаем:

$$i\omega \int dy_p F = \int dy F \operatorname{div} \vec{j} = \int dy F \partial_k j_k = - \int dy j_k \partial_k F \quad (434)$$

для любой функции F . Подставив в (434) $F = y_s$, имеем:

$$i\omega \int dy \rho y_s = - \int dy j_k \partial_k y_s = - \int dy j_s \quad (435)$$

с учетом очевидного равенства $\partial_k y_s = \delta_{ks}$. Интеграл в левой части (435) есть, по определению (182), электрический дипольный момент системы d_s , так что равенство (435) можно переписать в виде

$$\int dy j_s = -i\omega d_s, \quad (436)$$

где d_s — компоненты вектора электрического дипольного момента $\vec{d}$.

Подставив теперь в (434) $F = y_s y_p$, получим:

$$\begin{aligned} i\omega \int dy \rho y_s y_p &= - \int dy j_k \partial_k (y_s y_p) = \\ &= - \int dy j_k (\delta_{ks} y_p + \delta_{kp} y_s) = - \int dy (y_p j_s + y_s j_p). \end{aligned} \quad (437)$$

Интеграл в левой части есть электрический квадрупольный момент T_{sp} (182), поэтому равенство (437) можно переписать в виде

$$\int dy (y_p j_s + y_s j_p) = -i\omega T_{ps}. \quad (438)$$

Нам понадобится также и выражение для антисимметричной по индексам sp величины $\int dy (y_p j_s - y_s j_p)$, которая выражается через определенный в (204) магнитный момент системы $\vec{m}$. Действительно, из определения векторного произведения следует, что $y_p j_s - y_s j_p = \varepsilon_{pst} [y \times j]_t$, откуда

$$\int dy (y_p j_s - y_s j_p) = \varepsilon_{pst} \int dy [y \times j]_t = 2c\varepsilon_{pst} m_t \quad (439)$$

при учете определения (204) магнитного момента $\vec{m}$.

Соотношения (436), (438) и (439) — нужные для дальнейшего справочные формулы.

Вычисление интегралов в (432). Перепишем выражение (432) в виде

$$A_s(x) = (e^{ikr}/cr)I_s, \quad I_s \equiv \int dy j_s(y) - ikn_p \int dy j_s(y)y_p \quad (440)$$

без учета обозначенных в (432) многоточием поправок. Первый вклад в I_s , который мы обозначим через $I_s^{(0)}$, выражается согласно (436) через электрический дипольный момент d_s : $I_s^{(0)} = -i\omega d_s$. Во втором вкладе разложим произведение $j_s(y)y_p$ на симметричную и антисимметричную относительно перестановки индексов sp части:

$$\int dy j_s y_p = \int dy \left\{ [y_p j_s + y_s j_p]/2 + [y_p j_s - y_s j_p]/2 \right\}.$$

Симметричный по перестановке sp вклад в правой части выражается через электрический квадрупольный момент T_{sp} соотношением (438), а антисимметричный — через магнитный момент m_i в (439), что дает

$$\int dy j_s y_p = -(i\omega/2)T_{sp} + c\varepsilon_{psl}m_l. \quad (441)$$

Введем для величины I_s в (440) обозначение

$$I_s = I_s^{(0)} + I_s^{(-)} + I_s^{(+)}, \quad (442)$$

где $I_s^{(0)}$ — вклад электрического дипольного момента, $I_s^{(-)}$ — вклад магнитного момента, а $I_s^{(+)}$ — электрического квадрупольного момента.

Подставляя в (440) выражение (441), для магнитного вклада получаем $I_s^{(-)} = -ikc\varepsilon_{psl}n_p m_l = i\omega[n \times m]_s$, а для квадрупольного $I_s^{(+)} = -(k\omega/2)T_{sp}n_p$. Суммируя все результаты, имеем:

$$I_s^{(0)} = -i\omega d_s, \quad I_s^{(-)} = i\omega[n \times m]_s, \quad I_s^{(+)} = -(k\omega/2)T_{sp}n_p. \quad (443)$$

Отсюда следует, что ответы для магнитного и квадрупольного вкладов получаются из простейшего “дипольного приближения”, в котором учитывается только вклад $I_s^{(0)}$, следующей простой заменой (первая — для магнитного вклада, вторая — для квадрупольного):

$$d_s \rightarrow [m \times n]_s \text{ или } d_s \rightarrow (-ik/2)T_{sp}n_p. \quad (444)$$

Простые правила замены (444) очень полезны, так как они позволяют без дополнительных вычислений переносить на случай магнитного дипольного или электрического квадрупольного излучателя результаты, получаемые в простейшем (электрическом) дипольном приближении.

Дипольное приближение: расчет напряженностей в волновой зоне $r \gg \lambda$. Векторный потенциал в этом приближении определяется выражением (440) с $I_s = I_s^{(0)}$ из (443), что дает

$$\vec{A}(x) = -ik\vec{d}(e^{ikr}/r). \quad (445)$$

Соответствующие напряженности определяются соотношениями $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ и $\vec{E} = ik^{-1} \text{rot } \vec{H}$ из (425).

Выведем сначала справочную формулу для вычисления величин типа $\text{rot}(f\vec{e})$, в которых функция f зависит только от переменной $r \equiv |\vec{x}|$, а $\vec{e}$ — любой постоянный, т. е. не зависящий от координат $\vec{x}$ вектор. Из определения операции rot с учетом известного из (192) соотношения $\partial_i r = n_i$ получаем: $(\text{rot}(f\vec{e}))_i = \varepsilon_{ikl} \partial_k (f e_l) = \varepsilon_{ikl} e_l (df/dr) \partial_k r = (df/dr) \varepsilon_{ikl} n_k e_l = (df/dr)[\vec{n} \times \vec{e}]_i$. Таким образом:

$$\text{rot}(f\vec{e}) = (df/dr)[\vec{n} \times \vec{e}] \text{ при } f = f(r) \text{ и } \vec{e} = \text{const.} \quad (446)$$

Пользуясь этой формулой, для $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ с $\vec{A}$ из (445) получаем:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = -ik[\vec{n} \times \vec{d}] \frac{d}{dr}(e^{ikr}/r). \quad (447)$$

При вычислении $\vec{E} = ik^{-1} \text{rot } \vec{H}$ с $\vec{H}$ из (447) мы уже не можем воспользоваться простой формулой (446), поскольку роль $\vec{e}$ в (446) теперь играет величина $[\vec{n} \times \vec{d}]$ в (447), зависящая от $\vec{x}$ через $\vec{n} = \vec{x}/r$.

Вычисления существенно упрощаются, если ограничиться анализом решения только в *волновой зоне*, определяемой условием $kr \gg 1$, т. е. $r \gg \lambda$. Знания напряженностей в этой области достаточно для расчета интенсивности излучения, которая определяется потоком энергии при $r \rightarrow \infty$.

Ноясним теперь, в чем состоит упрощение расчета в волновой зоне. Вычислив входящую в (447) производную, получаем:

$$\frac{d}{dr}(e^{ikr}/r) = (ike^{ikr}/r)[1 - 1/ikr]. \quad (448)$$

Первый вклад происходит от дифференцирования множителя $\exp(ikr)$, второй — от дифференцирования множителя $1/r$. В волновой зоне, по условию, $kr \gg 1$, поэтому вторым вкладом в (448) можно пренебречь. Различие между этими вкладами определяется тем, что при дифференцировании экспоненты появляется множитель $ik \propto 1/\lambda$, а дифференцированию по r любого другого объекта соответствует по размерности добавочный множитель $1/r \ll 1/\lambda$. Обобщая эти наблюдения, можно сказать, что для всех содержащих множитель $\exp(ikr)$ величин при дифференцировании в волновой зоне нужно учитывать только производную этой экспоненты (что дает множитель ik), пренебрегая прочими вкладами.

При таком соглашении формула для $\text{rot } \vec{F} c \vec{F} \propto \exp(ikr)$ принимает очень простой вид:

$$\text{rot } \vec{F} = ik[\vec{n} \times \vec{F}] \quad (449)$$

(она получается из (446) заменой df/dr на ikf , что верно, если дифференцируется только множитель $\exp(ikr)$).

С помощью соотношения (449) для напряженностей в волновой зоне с $\vec{A}$ из (445) получаем:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = ik[\vec{n} \times \vec{A}] = k^2[\vec{n} \times \vec{d}](e^{ikr}/r), \quad (450)$$

$$\vec{E} = ik^{-1} \text{rot } \vec{H} = -[\vec{n} \times \vec{H}] = [\vec{H} \times \vec{n}]. \quad (451)$$

Гармонический дипольный излучатель: расчет интенсивности излучения и диаграммы направленности для синфазного излучателя. Рассмотрим простейший случай гармонического дипольного излучателя с заданной частотой $\omega > 0$. Это значит, что комплексный вектор $\vec{d}(t)$ электрического дипольного момента системы и соответствующая вещественная “физическая” величина $\vec{d}^{\text{физ}}(t)$ имеют вид

$$\vec{d}(t) = \vec{d} \exp(-i\omega t), \quad \vec{d}^{\text{физ}}(t) = \text{Re } \vec{d}(t) \quad (452)$$

с некоторой комплексной амплитудой $\vec{d}$. Из (452) следует, что компоненты вещественного вектора $\vec{d}^{\text{физ}}(t)$ колеблются по гармоническому закону

$$d_s^{\text{физ}}(t) = a_s \cos(\omega t - \delta_s) \quad (453)$$

с некоторыми положительными амплитудами a_s и с произвольными сдвигами фазы δ_s . Комплексный вектор $\vec{d}$ в (452) содержит информацию как об амплитудах колебаний, так и об их сдвигах фаз:

$$\vec{d}_s = a_s \exp(i\delta_s). \quad (454)$$

Вещественные “физические” напряженности $\vec{E}^{\text{Физ}}(t)$ и $\vec{H}^{\text{Физ}}(t)$ определяются по их комплексным амплитудам (450), (451) аналогичными (452) соотношениями:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{Физ}}(t) &= \text{Re}[\vec{E} \exp(-i\omega t)] = [\vec{E} \exp(-i\omega t) + \vec{E}^* \exp(i\omega t)]/2, \\ \vec{H}^{\text{Физ}}(t) &= \text{Re}[\vec{H} \exp(-i\omega t)] = [\vec{H} \exp(-i\omega t) + \vec{H}^* \exp(i\omega t)]/2.\end{aligned}\quad (455)$$

По ним определяется вектор плотности потока энергии $\vec{S}$:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= (c/4\pi)[\vec{E}^{\text{Физ}} \times \vec{H}^{\text{Физ}}] = (c/16\pi) \times \\ &\times \left\{ [\vec{E} \times \vec{H}] \exp(-2i\omega t) + [\vec{E}^* \times \vec{H}^*] \exp(2i\omega t) - [\vec{E} \times \vec{H}^*] - [\vec{E}^* \times \vec{H}] \right\}.\end{aligned}\quad (456)$$

Первые два вклада в правой части содержат периодическую зависимость от времени $\propto \exp(\pm 2i\omega t)$, два последних не зависят от t и взаимно сопряжены. Поэтому при вычислении интенсивности излучения в данной задаче всегда рассматривается усредненная по времени величина $\langle \vec{S} \rangle$ (скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают операцию усреднения по времени). Тогда два первых вклада в правой части (456) отбрасываются, так как их средние по времени равны нулю, а два последних вклада заменяются удвоенной вещественной частью одного из них, что дает:

$$\langle \vec{S} \rangle = (c/8\pi) \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]. \quad (457)$$

Учитывая соотношение (451), по формуле “БАЦ–ЦАВ” получаем: $[\vec{E} \times \vec{H}^*] = [(\vec{H} \times \vec{n}) \times \vec{H}^*] = [\vec{H}^* (\vec{n} \times \vec{H})] = \vec{n}(\vec{H} \vec{H}^*) - \vec{H}(\vec{n} \vec{H}^*)$. Последний вклад равен нулю, так как из выражения (450) для $\vec{H}$ следует, что векторы $\vec{H}$ и $\vec{H}^*$ ортогональны $\vec{n}$, поэтому $[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \vec{n}(\vec{H} \vec{H}^*) \equiv \vec{n}|\vec{H}|^2$. Подставляя это выражение в (457) и убирая за ненадобностью знак Re , для усредненного по времени вектора плотности потока энергии получаем:

$$\langle \vec{S} \rangle = (c/8\pi) |\vec{H}|^2 \vec{n}. \quad (458)$$

Интенсивность излучения на бесконечность $I(\vec{n})$ определяется общим правилом (412), в котором теперь под $\vec{S}_n$ нужно понимать усредненную по времени величину, а роль R играет переменная r в выражениях для напряженностей. Из (458) следует, что усредненная величина $\langle \vec{S} \rangle_n$ — просто коэффициент при $\vec{n}$ в (458), поэтому из (412) имеем:

$$I(\vec{n}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \{r^2 (c/8\pi) |\vec{H}|^2\}. \quad (459)$$

Подставляя сюда известное из (450) выражение для $\vec{H}$, видим, что степени r взаимно сокращаются, поэтому знак “lim” можно убрать, и в итоге получаем:

$$I(\vec{n}) = (ck^4/8\pi) |\vec{n} \times \vec{d}|^2. \quad (460)$$

Это окончательный ответ для усредненной по времени интенсивности излучения на бесконечность произвольного гармонического дипольного излучателя (тем самым и для произвольного гармонического источника в дипольном приближении) с любыми амплитудами a , и сдвигами фаз δ , в (453).

Рассмотрим теперь подробнее частный случай *синфазного излучателя*, для которого все сдвиги фаз в (453) одинаковы и поэтому вектор $\vec{d}$ в (452) можно считать вещественным (общий фазовый множитель в квадрате модуля $|\vec{H}|^2$ сокращается). Для такого излучателя в (460) имеем $|\vec{n} \times \vec{d}|^2 = d^2 \sin^2 \theta$, где $d \equiv |\vec{d}|$ и θ — угол между вещественными векторами $\vec{n}$ и $\vec{d}$. Подставляя это выражение в (460), получим:

$$I(\vec{n}) = (ck^4 d^2 / 8\pi) \sin^2 \theta. \quad (461)$$

Отсюда следует, что излучение максимально в ортогональной вектору $\vec{d}$ плоскости, т. е. направлено в основном “вбок от $\vec{d}$ ”. Этим объясняется, например, почему линейную телевизионную антенну нужно ориентировать поперек направления на передающий центр. В радиотехнике есть простой принцип для антенны, которая всегда может работать как в режиме передачи (излучения), так и приема: антенна лучше всего принимает по тому направлению, по которому в “режиме передачи” она лучше всего излучает. В нашем случае оптимальное направление — “поперек от вектора дипольного момента”, который для линейной антенны направлен, естественно, вдоль нее. Отметим, что для линейной антенны с фиксированным направлением источник всегда является синфазным, поскольку у него всего лишь одна независимая компонента — проекция на направление антенны.

Проинтегрировав выражение (461) по всем направлениям $\vec{n}$, для полной мощности излучения P синфазного дипольного источника получим:

$$P = \int d\vec{n} I(\vec{n}) = ck^4 d^2 / 3. \quad (462)$$

Если излучатель дипольный и гармонический, но не синфазный (простейший пример — заряженная частица, движущаяся по окружности), то

для расчета интенсивности излучения нужно пользоваться общей формулой (460), определив предварительно по условиям задачи комплексную амплитуду $\vec{d}$ вектора дипольного момента.

Заключительные замечания. Мы вычисляли выше интенсивность излучения для простого гармонического источника с одной частотой ω . Для источника общего вида (ряд Фурье по частотам или интеграл Фурье типа (422)) мы можем найти поле для любой фурье-компоненты $\vec{j}(\omega, \vec{x}) \cdot \exp(-i\omega t)$ тока $\vec{j}(t, \vec{x})$, полный ответ для полей получается интегрированием (для рядов — суммированием) по частотам ω в силу принципа суперпозиции. Но для квадратичных по полям объектов типа вектора плотности потока энергии $\vec{S}$ принцип суперпозиции неприменим из-за необходимости учета интерференции вкладов различных фурье-компонент (грубо говоря, квадрат суммы не равен сумме квадратов). Поэтому в таких задачах нужно сначала вычислять поля интегрированием по частотам, и только после этого можно переходить к анализу энергетических характеристик для полученных полей.

Магнитный дипольный и электрический квадрупольный гармонические излучатели. *Магнитный излучатель.* Как было показано выше (см. соотношения (444) и текст после них), ответы для магнитного дипольного излучателя получаются из формул простейшего дипольного (электрического) приближения заменой

$$\vec{d} \rightarrow [\vec{m} \times \vec{n}], \quad (463)$$

где $\vec{m}$ — комплексная амплитуда в аналогичном (452) выражении для магнитного момента системы. Выполнив в соотношении (460) замену (463), получим следующее выражение для интенсивности излучения магнитного дипольного излучателя:

$$I(\vec{n}) = (ck^4/8\pi) |[\vec{n}[\vec{m} \times \vec{n}]]|^2. \quad (464)$$

С помощью формулы “БАЦ—ЦАБ” получаем: $|[\vec{n}[\vec{m} \times \vec{n}]]|^2 = |\vec{m} - \vec{n}(\vec{n}\vec{m})|^2 = [\vec{m} - \vec{n}(\vec{n}\vec{m})][\vec{m}^* - \vec{n}(\vec{n}\vec{m}^*)] = (\vec{m}\vec{m}^*) - (\vec{n}\vec{m})(\vec{n}\vec{m}^*)$. Подстановка этого выражения в (464) дает:

$$I(\vec{n}) = (ck^4/8\pi) [(\vec{m}\vec{m}^*) - (\vec{n}\vec{m})(\vec{n}\vec{m}^*)]. \quad (465)$$

Эта формула справедлива для любого гармонического магнитного излучателя с произвольными амплитудами и сдвигами фаз в аналогичном (453) представлении магнитного момента системы.

Для синфазного излучателя вектор $\vec{m}$ в (465) можно считать вещественным, тогда $(\vec{m}\vec{m}^*) - (\vec{n}\vec{m})(\vec{n}\vec{m}^*) = m^2 - (\vec{n}\vec{m})^2 = m^2 \sin^2 \theta$, где $m \equiv |\vec{m}|$, а θ — угол между вещественными векторами $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Тогда из (465) получаем:

$$I(\vec{n}) = (ck^4 m^2 / 8\pi) \sin^2 \theta, \quad (466)$$

что эквивалентно простой замене $\vec{d} \rightarrow \vec{m}$ в формуле (461). Из (466) следует, что направление максимума излучения (и приема) — “вбок от направления магнитного момента $\vec{m}$ ”. Простейший пример магнитной “приемо-передающей” антенны — плоская рамка с током. Ее магнитный момент $\vec{m}$ направлен перпендикулярно плоскости рамки, следовательно, направление максимального излучения (и приема) — в плоскости рамки.

Гармонический квадрупольный излучатель. В этом случае ответы получаются из формул дипольного приближения указанной в (444) заменой

$$\vec{d} \rightarrow -(ik/2)T\vec{n}, \quad (467)$$

где T — матрица электрического квадрупольного момента (182), вектор $T\vec{n}$ — результат действия матрицы T на вектор $\vec{n}$. Сделав замену (467) в выражении (460), получим:

$$I(\vec{n}) = (ck^6 / 32\pi) |\vec{n} \times T\vec{n}|^2. \quad (468)$$

Неприводимый квадрупольный момент $\vec{T}_{ik}$ (188) отличается от исходного момента T_{ik} (182) лишь слагаемым типа $\text{const} \cdot \delta_{ik}$, т. е. кратной единичной матрице добавкой в T . Такая добавка, очевидно, не дает вклада в (468), так что под матрицей T в (468) можно понимать неприводимый квадрупольный момент (188).

Конкретизируем теперь выражение (468) для частного случая гармонического синфазного квадрупольного излучателя с осевой симметрией, для которого T можно считать вещественной матрицей вида (197) с осью симметрии “3”:

$$T = (T_{33}/2) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (469)$$

где T_{33} — компонента “33” неприводимого квадрупольного момента. Обозначив через T' матрицу в (469) без коэффициента $T_{33}/2$, а через $\vec{e} = T'\vec{n}$ — результат действия матрицы T' на вектор $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$, имеем:

$$T'\vec{n} \equiv \vec{e} = \{-n_1, -n_2, 2n_3\}. \quad (470)$$

Пользуясь соотношением $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ для входящего в (468) векторного произведения, без учета общего множителя $(T_{33}/2)^2$ получаем

$$|[\vec{n} \times T' \vec{n}]|^2 = |[\vec{n} \times \vec{e}]|^2 = e^2 - (\vec{n}\vec{e})^2. \quad (471)$$

Из (470) следует $e^2 = n_1^2 + n_2^2 + 4n_3^2 = 1 + 3n_3^2$ (поскольку $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \vec{n}^2 = 1$) и $(\vec{n}\vec{e}) = -n_1^2 - n_2^2 + 2n_3^2 = -1 + 3n_3^2$. Подставляя эти величины в (471), имеем:

$$|[\vec{n} \times T' \vec{n}]|^2 = 1 + 3n_3^2 - (-1 + 3n_3^2)^2 = 9n_3^2(1 - n_3^2). \quad (472)$$

По смыслу $n_3 = \cos \theta$, где θ — угол между направлением излучения $\vec{n}$ и осью симметрии “3” нашего квадрупольного излучателя. Подставляя выражение (472) в (468) с учетом дополнительного коэффициента $T_{33}/2$ в определении $T = (T_{33}/2)T'$ матрицы T' , получаем следующий окончательный ответ для интенсивности излучения гармонического синфазного квадрупольного источника с осевой симметрией:

$$I(\vec{n}) = (9ck^6/128\pi)T_{33}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (473)$$

Диаграмма направленности для выражения (473) является “четырёхлепестковой”, максимумы излучения соответствуют четырем направлениям под углом 45 градусов к осям. Эту диаграмму нужно еще мысленно “раскрутить” вокруг оси симметрии “3”, так как ответ не зависит от соответствующего угла новорота φ .

Из (473) для полной мощности излучения P получим:

$$P = \int d\vec{n} I(\vec{n}) = (3ck^6/80)T_{33}^2. \quad (474)$$

4.6 Линейная антенна с центральным возбуждением

Это пример конкретной задачи, для которой интегрирование в (431) можно выполнить точно, не прибегая к мультипольному разложению.

Такая антенна — проводящий (металлический) стержень с бесконечно тонким разрезом посередине, на края которого от внешнего источника подается по двум проводам периодический сигнал (ток) с заданной амплитудой и с заданной частотой $\omega > 0$ (см. рис. 4.4).

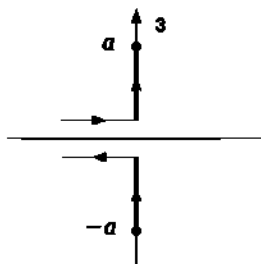


Рис. 4.4. Линейная антенна с центральным возбуждением. Стрелками показаны направления токов в некоторый конкретный момент времени t

Мы считаем антенну направленной по оси “3”, ее длина — $2a$, так что в переменных (x_1, x_2, x_3) концы антенны имеют координаты $(0, 0, a)$ и $(0, 0, -a)$.

Значения токов в двух подводящих проводах в любой момент времени различаются лишь знаком (на рис. 4.4 направления токов в некоторый конкретный момент времени t показаны стрелками). Поэтому токи в двух (верхней и нижней) половинах антенны совпадают по величине и направлению, т. е. ток в антенне — четная функция переменной x_3 .

Вид плотности тока. По общему правилу для гармонического источника

$$\vec{j}^{\text{физ}}(t, \vec{x}) = \text{Re}[\vec{j}(\vec{x}) \exp(-i\omega t)], \quad (475)$$

где $\vec{j}(\vec{x})$ — амплитуда объемной плотности тока, вид которой мы и хотим найти. Ясно, что ток отличен от нуля только в самой антенне и направлен вдоль нее, поэтому величина $\vec{j}(\vec{x})$ должна содержать произведение координатных δ -функций $\delta(x_1)\delta(x_2)$ и множитель $\vec{e}$ — единичный вектор направления антенны, т. е. оси “3”.

Остается найти зависимость плотности тока от переменной x_3 в интервале $-a \leq x_3 \leq a$. Общая идея: ток в каждой из половин антенны является суперпозицией волн, бегущих со скоростью света c в двух возможных направлениях (верх-низ), т. е. линейной комбинацией функций вида $\exp(-i\omega t \pm ikx_3)$ с волновым числом $k = \omega/c$. В амплитуде $\vec{j}(\vec{x})$ это соответствует суперпозиции

$$c_1 \exp(ikx_3) + c_2 \exp(-ikx_3) \quad (476)$$

с некоторыми коэффициентами $c_{1,2}$. Для их определения в нашем распоряжении есть следующие два условия:

- 1) при $x_3 = \pm a$, т. е. на концах антенны ток равен нулю;
- 2) ток в антенне — четная функция переменной x_3 (второе свойство было обосновано выше).

Ясно, что удовлетворить указанным двум условиям подбором коэффициентов $c_{1,2}$ в (476) при любой частоте ω невозможно: действительно, из второго условия тогда сразу следует $c_1 = c_2$, поэтому выражение (476) будет кратным $\cos(kx_3)$ и не может быть равным нулю при $x_3 = \pm a$ для произвольного значения $k = \omega/c$.

Решение этой проблемы состоит в следующем: наличие разреза в центре антенны означает, что ток в этой точке $x_3 = 0$ не обязан быть гладким — он может иметь излом (но не скачок — непрерывность тока при $x_3 = 0$ гарантирована его четностью по x_3). Это значит, что мы не обязаны считать единое аналитическое представление (476) справедливым сразу для всего интервала $-a \leq x_3 \leq a$. Его нужно использовать только для одной из двух половин антенны, перенося затем ответ на вторую половину из условия четности по x_3 .

Итак, рассмотрим выражение (476) для верхней половины антенны, т. е. для интервала $0 \leq x_3 \leq a$. Из условия равенства нулю тока при $x_3 = a$ получаем: $c_1 \exp(ika) + c_2 \exp(-ika) = 0$, откуда следует $c_2 = -c_1 \exp(2ika)$. Подставив это значение c_2 в (476), приводим это выражение к виду

$$\begin{aligned} & c_1 \exp(ikx_3) - c_1 \exp(2ika - ikx_3) = \\ & = c_1 \exp(ika)x[\exp(ikx_3 - ika) - \exp(ika - ikx_3)] = \text{const} \cdot \sin(ka - kx_3). \end{aligned}$$

Четное по x_3 продолжение этого выражения на весь интервал $-a \leq x_3 \leq a$ обеспечивается, очевидно, простой заменой $x_3 \rightarrow |x_3|$. Суммируя все сказанное выше, для искомой амплитуды объемной плотности тока получаем:

$$\vec{j}(\vec{x}) = \vec{e}I\delta(x_1)\delta(x_2)\sin(ka - k|x_3|), \quad (477)$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор направления антенны (ось “3”), I — числовой коэффициент, определяемый амплитудой подаваемого на антенну переменного тока, т. е. фактически это произвольный параметр задачи. В обозначениях (477) амплитуда подаваемого на антенну тока равна $I \sin(ka)$ (ток в зазоре), амплитуда тока в самой антенне есть $I \sin(ka - k|x_3|)$. Ее зависимость от x_3 не противоречит закону сохранения заряда, — переменно-

тока компенсируется колебаниями линейной плотности заряда в антенне. Без ограничения общности параметр I можно считать вещественным.

Вычисление векторного потенциала $\vec{A}$. Он определяется соотношением (431), в которое нужно подставить выражение (477) для плотности тока с заменой в нем $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$ переменной интегрирования. Входящие в (477) δ -функции "снимают" интегрирование по переменным $y_{1,2}$ и остается лишь интеграл по переменной y_3 в интервале $-a \leq y_3 \leq a$.

В соотношение (431) входит скалярное произведение $(\vec{n}\vec{y})$, в котором $\vec{n} \equiv \vec{x}/r$ — единичный вектор направления на точку наблюдения $\vec{x}$ (направление излучения), а переменная $\vec{y}$ пробегает по излучающей системе, в нашем случае, — по антенне ($y_1 = y_2 = 0$, $-a \leq y_3 \leq a$). Пусть θ — угол между направлением излучения $\vec{n}$ и входящим в (477) единичным вектором $\vec{e}$, направленным по оси "3". Если $y_3 \geq 0$ (верхняя половина антенны), то θ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{y}$, и тогда $(\vec{n}\vec{y}) = y_3 \cos \theta$. Если же $y_3 \leq 0$ (нижняя половина антенны), то угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{y}$ равен $\pi - \theta$ и тогда $(\vec{n}\vec{y}) = |y_3| \cos(\pi - \theta) = -|y_3| \cos \theta = y_3 \cos \theta$. Таким образом, в обоих случаях $(\vec{n}\vec{y}) = y_3 \cos \theta$ при любом знаке y_3 .

Обозначив в дальнейшем для краткости $y_3 \equiv z$, из соотношений (431) и (477) получаем:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{e}I(e^{ikr}/cr) \int_{-a}^a dz \sin(ka - k|z|) \exp(-ikz \cos \theta). \quad (478)$$

Все дальнейшее — вычисление этого интеграла. Представив входящую в него экспоненту в виде $\cos[kz \cos \theta] - i \sin[kz \cos \theta]$, видим, что первое слагаемое четно по z , а второе — нечетно, поэтому не дает вклада в интеграл (478). Сохраняя только четный по z вклад и заменяя в нем интеграл по интервалу $-a \leq z \leq a$ удвоенным вкладом интеграла по интервалу $0 \leq z \leq a$, в котором $|z| = z$, получаем:

$$\vec{A}(\vec{x}) = 2\vec{e}I(e^{ikr}/cr) \int_0^a dz \sin(ka - kz) \cos(kz \cos \theta). \quad (479)$$

Пользуясь справочной формулой $2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$, приводим выражение (479) к виду

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{e}I(e^{ikr}/cr) \int_0^a dz [\sin(ka - kz + kz \cos \theta) - \sin(ka - kz - kz \cos \theta)]. \quad (480)$$

Входящие сюда типовые интегралы легко вычисляются:

$$\int_0^a dz \sin(Az + B) = A^{-1} [\cos B - \cos(Aa + B)]$$

для любых коэффициентов A, B . Пользуясь этой формулой, нетрудно вычислить интеграл в (480), что дает (элементарные выкладки опускаем)

$$\vec{A}(\vec{x}) = 2\vec{e}I(e^{ikr}/ckr) \sin^{-2} \theta [\cos(ka \cos \theta) - \cos(ka)]. \quad (481)$$

Это точный ответ для определенной соотношением (431) амплитуды векторного потенциала в данной задаче.

Напряженности и интенсивность излучения. Мы будем вычислять напряженности $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ и $\vec{E} = ik^{-1} \text{rot } \vec{H}$ (425) только в волновой зоне $kr \gg 1$, где можно пользоваться простой формулой (449). Тогда

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = ik[\vec{n} \times \vec{A}], \quad \vec{E} = ik^{-1} \text{rot } \vec{H} = [\vec{H} \times \vec{n}] \quad (482)$$

с известным из (481) выражением для $\vec{A}$. Поскольку связь между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в (482) такая же, как и в (451), и обе напряженности ортогональны $\vec{n}$ согласно (482), формула (459) для интенсивности излучения остается справедливой, поэтому для $\vec{H}$ из (482) получаем:

$$I(\vec{n}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \{r^2(c/8\pi)|\vec{H}|^2\} = (ck^2/8\pi) \lim_{r \rightarrow \infty} \{r^2|[\vec{n} \times \vec{A}]|^2\}.$$

Подставив сюда $\vec{A}$ из (481), с учетом равенства $|[\vec{n} \times \vec{e}]|^2 = \sin^2 \theta$ находим:

$$I(\vec{n}) = (I^2/2\pi c) \sin^{-2} \theta [\cos(ka \cos \theta) - \cos(ka)]^2. \quad (483)$$

Это и есть окончательный ответ для интенсивности излучения такой антенны. Напомним, что входящая в него величина I — произвольный параметр, задающий силу поступающего на антенну тока, а θ — угол между антенной и направлением излучения. Отметим, что выражение (483) четно относительно замены $\theta \rightarrow \pi - \theta$.

Частные случаи.

1. *Дипольное приближение.* Его применимость гарантирована при $ka = 2\pi a/\lambda \ll 1$, т. е. для антенны, размер которой много меньше длины волны λ . Пользуясь приближением $\cos x \cong 1 - x^2/2$ во всех формулах с малым аргументом x , для выражения в квадратной скобке (483) в таком

приближении получим $(ka)^2/2 - (ka \cos \theta)^2/2 = (k^2 a^2/2) \sin^2 \theta$. Тогда интенсивность излучения (483) будет кратной $\sin^2 \theta$ в согласии с общей формулой дипольного приближения (461). Сравнивая коэффициенты при $\sin^2 \theta$ в этих двух выражениях, можно выразить дипольный момент системы d в (461) через параметр I в (483).

2. *Полуволновая антенна* с $2ka = \pi$. Тогда $ka = \pi/2$ и для тока в (477) имеем $\sin(ka - k|x_3|) = \sin(\pi/2 - k|x_3|) = \cos(kx_3)$, график тока показан на рис. 4.5.

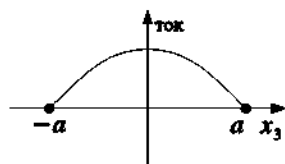


Рис. 4.5. Ток в полуволновой антенне

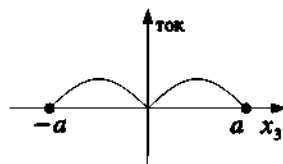


Рис. 4.6. Ток в полноволновой антенне

Интенсивность излучения (483) для полуволновой антенны с $ka = \pi/2$ принимает вид

$$I(\vec{n}) = (I^2/2\pi c) \sin^{-2} \theta \cos^2(\pi \cos \theta/2). \quad (484)$$

При малых углах θ имеем $\cos(\pi \cos \theta/2) \cong \cos(\pi/2 - \pi\theta^2/4) = \sin(\pi\theta^2/4) \cong \pi\theta^2/4$ (воспользовались тем, что $\cos \theta \cong 1 - \theta^2/2$). Поэтому все выражение (484) при малых θ ратно θ^2 как и в дипольном приближении $\propto \sin^2 \theta$.

Диаграмма направленности для точного выражения (484) практически совпадает с графиком этой величины в дипольном приближении, т. е. излучение максимально “вбок от направления антенны”. Различие между точным ответом и дипольным приближением сводится лишь к нескольким процентам, что даже удивительно, поскольку соответствующий параметр малости — отношение размера системы к длине волны — равен в данном случае $1/2$ и очень малым считаться не может. По этому поводу можно отметить, что в физике довольно часто приближенные ответы хорошо работают даже вне пределов своей формальной области применимости, и рассмотренная нами задача — один из таких примеров.

3. *Полноволновая антенна* с $2ka = 2\pi$. В этом случае $ka = \pi$ и для тока в (477) имеем $\sin(ka - k|x_3|) = \sin(\pi - k|x_3|) = \sin(k|x_3|)$, график тока показан на рис. 4.6. Для полноволновой антенны с $ka = \pi$ выражение в

квадратной скобке (483) принимает вид $1 + \cos(\pi \cos \theta) = 2 \cos^2(\pi \cos \theta/2)$, отсюда для интенсивности излучения (483) получаем:

$$I(\vec{n}) = (2I^2/\pi c) \sin^{-2} \theta \cos^4(\pi \cos \theta/2). \quad (485)$$

Соответствующая диаграмма направленности качественно такая же, как и для полуволновой антенны или дипольного излучателя, только теперь она будет более “остронаправленной”, т. е. “лепестки вбок от антенны” будут более узкими.

4.7 Динамические уравнения Максвелла в среде

Общий принцип вывода уравнений. Он уже формулировался при выводе статических уравнений Максвелла в среде, поэтому здесь мы лишь кратко напомним основные моменты.

1. Полные источники $\rho, \vec{j}$ представляются в виде суммы внесенных извне “свободных источников” и “связанных источников”, порожденных поляризацией среды. Для полных полей, которыми являются, по соглашению, $\vec{E}$ и $\vec{B}$, пишутся обычные (как в вакууме) уравнения Максвелла с полными источниками, т. е. это обычные уравнения (1)–(4) с заменой в них $\vec{E}, \vec{H}$ на $\vec{E}, \vec{B}$ и с $\rho = \rho_{\text{полн}}, \vec{j} = \vec{j}_{\text{полн}}$.

2. Следующий шаг — получение формул, выражающих связанные источники через поляризацию среды, т. е. через векторы $\vec{P}$ и $\vec{M}$ — объемные плотности электрического и магнитного дипольного момента среды. Для получения таких формул сначала нужно найти выражение для поля, создаваемого бесконечно малым (= “точечным”) электрическим и магнитным диполями. Если такие выражения известны, по ним легко найти поле, создаваемое всей поляризованной средой, рассматривая любой бесконечно малый элемент ее объема как “точечный” диполь и суммируя вклады всех этих элементов. По этим полям нетрудно найти эквивалентные заданной поляризации объемные плотности связанных зарядов и токов $\rho^{\text{связ}}, \vec{j}^{\text{связ}}$.

3. Полученные выражения для $\rho^{\text{связ}}$ и $\vec{j}^{\text{связ}}$ подставляются в правые части уравнений Максвелла для полных полей с полными (свободными + связанными) источниками, затем вклады связанных источников переносятся в левые части уравнений, что и приводит к окончательным ответам.

Ключевым моментом в этих рассуждениях является знание выражений для полей, создаваемых бесконечно малыми (= точечными) диполями.

Эти выражения являются просто дипольными вкладами в соответствующих мультипольных разложениях, построение и анализ которых должно быть, следовательно, необходимым предварительным этапом. В статике это уже было сделано, что привело к соотношениям (196), (208) для полей электрического и магнитного точечных диполей. В динамике мы можем приступить к обсуждению этой проблемы только теперь после общего анализа динамических мультипольных разложений в п. 4.5.

Выражение связанных источников через поляризацию. Приступая к реализации изложенной выше программы в динамике, начнем с вычисления полей, создаваемых точечными (электрическим и магнитным) диполями. Возвращаясь к анализу п. 4.5, будем, как и там, считать все источники и поля гармоническими, т. е. кратными $\exp(-i\omega t)$.

Прежде всего, нужно подчеркнуть следующее различие в постановке задачи: раньше нас интересовала интенсивность излучения на бесконечности, поэтому мы рассматривали поля только в волновой зоне $kr = 2\pi r/\lambda \gg 1$, что упрощало вычисления. Теперь же мы считаем излучателем ("диполем") любой бесконечно малый элемент среды и вычисляем создаваемое им поле в любой другой точке, в том числе и внутри среды. Поэтому теперь расстояние r от диполя до точки наблюдения не может считаться очень большим по сравнению с длиной волны λ : нам нужен ответ как в дальней (=волновой) зоне $kr \gg 1$, так и в ближней зоне $kr \ll 1$, а также, естественно, и в промежуточной области. Но зато есть упрощение: нам нужен не весь точный ответ, а только входящие в него дипольные (электрический и магнитный) вклады.

По этому новоду необходимо сделать еще одно важное уточнение: в н. 4.5 мы полагали $L_{\text{сист}} \ll r$ (что остается верным и сейчас, поскольку диполь "бесконечно малый") и считали, что всеми поправками порядка $L_{\text{сист}}/r$ в конечных ответах можно пренебречь. Поэтому мы тогда сразу заменяли множитель R^{-1} с $R = |\vec{x} - \vec{y}|$ в (428) на r^{-1} с $r = |\vec{x}|$, учитывая поправки в разложении R по $\vec{y}$ (429) только в фазе kR , где они могут конкурировать с длиной волны λ . Теперь так поступать нельзя, поскольку в ближней зоне $r \ll \lambda$ вклад в ответ магнитного момента всегда является малой величиной порядка $L_{\text{сист}}/r$ по сравнению с вкладом электрического дипольного момента (доказательство предоставляем читателю). Тем не менее, сейчас мы не должны отбрасывать эту поправку, так как мы хотим вычислить поле точечного магнитного диполя при любом соотношении параметров r и λ независимо от его относительной величины по сравнению с вкладом электрического дипольного момента.

Итак, начинаем с вычисления полей электрического и магнитного точечных диполей с гармонической зависимостью от времени. Исходная точка — представление (428) для амплитуды векторного потенциала, которое мы перепишем в виде:

$$A_s(x) = \int dy j_s(y) f(R), \quad f(R) \equiv e^{ikR}/cR, \quad R \equiv |\vec{R}| \equiv |\vec{x} - \vec{y}|. \quad (486)$$

Величины A , j и их аргументы x , y — трехмерные векторы, но для упрощения записи мы не будем ставить над ними знак “ $\rightarrow$ ”, используя его только там, где это необходимо по смыслу.

Разложим входящую в (486) функцию $f(R)$ с $R = |\vec{x} - \vec{y}|$ в ряд по y :

$$f(R) = f(r) + y_p (\partial f(R) / \partial y_p) \Big|_{y=0} + \dots,$$

где $r \equiv |\vec{x}|$. Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \partial f(R) / \partial y_p &= [df(R) / dR] (\partial R / \partial y_p), \\ \partial R / \partial y_p &= -\partial R / \partial x_p = -n_p, \quad n_p = R_p / R, \end{aligned}$$

получаем: $f(R) = f(r) - n_p y_p f'(r) + \dots$, где $r \equiv |\vec{x}|$, $n_p = x_p / r$, а $f'(r)$ — производная функции $f(r)$ по r . Подставляя это выражение в (486), имеем:

$$A_s(x) = f(r) \int dy j_s(y) - f'(r) n_p \int dy y_p j_s(y) + \dots, \quad (487)$$

обозначенные многоточием поправки в дальнейшем отбрасываются.

Первый из входящих в (487) интегралов выражается через электрический дипольный момент $\vec{d}$ соотношением (436): $\int dy j_s(y) = -i\omega d_s$. Вторым интегралом в (487) можно разложить на симметричную и антисимметричную по перестановкам индексов ps части, симметричный вклад выражается через электрический квадрупольный момент соотношением (438), а антисимметричный — через магнитный момент соотношением (439): $\int dy y_p j_s(y) = \epsilon_{psl} m_l + \text{квадрупольный вклад}$. Учитывая в (487) только приведенные выше дипольные вклады, получаем:

$$A_s(\vec{r}) = -i\omega f(r) d_s - c f'(r) \epsilon_{slp} m_l n_p. \quad (488)$$

Это искомая точная формула для амплитуды векторного потенциала точечных электрического (первый вклад) и магнитного (второй вклад) гармонических диполей. Через $\vec{r}$ в (488) обозначается вектор от диполя в точку наблюдения, $r \equiv |\vec{r}|$, $\vec{n} \equiv \vec{r} / r$.

Воспользуемся теперь выражением (488) для вычисления поля, создаваемого всей средой, поляризация которой задается векторами $\vec{P}$ и $\vec{M}$, — объемными плотностями дипольного (электрического и магнитного) момента среды. Пусть x — точка наблюдения, y — произвольная точка среды, dy — дифференциал объема вокруг точки y . Этот бесконечно малый элемент среды имеет, по определению, электрический дипольный момент $d_s = P_s(y)dy$ и магнитный момент $m_l = M_l(y)dy$, которые и нужно подставить в (488) для вычисления вклада данного элемента среды в искомый векторный потенциал $\vec{A}$ в произвольной точке наблюдения x , затем ответ нужно проинтегрировать по y для суммирования вкладов всех элементов среды. В итоге получим:

$$A_s(x) = -i\omega \int dy P_s(y) f(R) - c \int dy \epsilon_{slp} M_l(y) n_p f'(R), \quad (489)$$

где $\vec{R} = \vec{x} - \vec{y}$ — вектор от диполя в точке y в точку наблюдения x , $R = |\vec{R}|$, $\vec{n} = \vec{R}/R$, $f'(R)$ — производная определенной в (486) функции $f(R)$ по R .

Выражение (489) — векторный потенциал, создаваемый поляризованной средой в любой точке x . По нему можно найти эквивалентный данной поляризации связанный ток $\vec{j}^{\text{связ}}$, отождествляя (489) с выражением (486) с $\vec{j} \equiv \vec{j}^{\text{связ}}$. Первое слагаемое в (489) имеет нужную форму (486), что сразу позволяет найти вклад электрической поляризации $\vec{P}$ в связанный ток: $\vec{j}_s^{\text{связ, электр.}} = -i\omega \vec{P}_s$. Второе слагаемое в (489) не совпадает по форме с (486), но его можно привести к такому виду. Для этого нужно воспользоваться равенствами $n_p f'(R) = \partial f(R)/\partial x_p = -\partial f(R)/\partial y_p$ и затем перенести производную $\partial/\partial y_p$ на множитель $M_l(y)$ интегрированием по частям. Тогда второй вклад в (489) примет вид $-c \int dy \epsilon_{slp} [\partial M_l(y)/\partial y_p] f(R)$, по форме совпадающий с (486), что позволяет найти магнитный вклад в связанный ток: $\vec{j}_s^{\text{связ, магн.}} = -c \epsilon_{slp} \partial_p M_l = c(\text{rot } \vec{M})_s$. Суммируя электрический и магнитный вклады, получаем следующее выражение для связанного тока в задаче с гармоническими полями и источниками:

$$\vec{j}^{\text{связ}} = -i\omega \vec{P} + c \text{rot } \vec{M}. \quad (490)$$

Нам нужно знать также и величину $\rho^{\text{связ}}$, которую легко найти из (490) и уравнения непрерывности (433) для гармонических источников. Это уравнение должно быть, очевидно, справедливым по отдельности как для вносимых извне свободных источников, так и для связанных

источников, создаваемых поляризацией среды. Из уравнения непрерывности (433) для связанных источников с $\vec{j}^{\text{связ}}$ из (490) получаем: $i\omega\rho^{\text{связ}} = \text{div } \vec{j}^{\text{связ}} = -i\omega \text{div } \vec{P}$, откуда следует $\rho^{\text{связ}} = -\text{div } \vec{P}$.

Итого, для гармонических полей и источников

$$\rho^{\text{связ}} = -\text{div } \vec{P}, \quad \vec{j}^{\text{связ}} = -i\omega\vec{P} + c \text{rot } \vec{M}. \quad (491)$$

Умножение на $-i\omega$ для гармонической функции эквивалентно применению к ней операции ∂_t , чем мы уже неоднократно пользовались. Сделав такую замену в (491), получаем:

$$\rho^{\text{связ}} = -\text{div } \vec{P}, \quad \vec{j}^{\text{связ}} = \partial_t \vec{P} + c \text{rot } \vec{M}. \quad (492)$$

Эта форма записи пригодна, очевидно, не только для гармонических, но и для любых зависящих от времени источников и полей.

Формулы (492) — искомые выражения связанных источников через поляризацию среды. В статике вклад $\partial_t \vec{P}$ в (492) исчезает и тогда соотношения (492) переходят в статические формулы (248).

Вывод нестационарных уравнений Максвелла в среде. Принцип вывода уже излагался в начале раздела: полные, т. е. создаваемые всей совокупностью источников, поля обозначаются, по соглашению, через $\vec{E}$ и $\vec{B}$, для них пишутся обычные уравнения Максвелла (1)–(4) с полными источниками и с заменой $\vec{E}, \vec{H} \rightarrow \vec{E}, \vec{B}$:

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{B} = 0, \quad (493)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho^{\text{полн}}, \quad \text{rot } \vec{B} - c^{-1} \partial_t \vec{E} = (4\pi/c)\vec{j}^{\text{полн}}. \quad (494)$$

Подставив в (494) полные источники в виде суммы свободных и связанных, используем для последних выражения (492) и затем перенесем эти вклады в левые части уравнений. Тогда получим:

$$\text{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho^{\text{своб}}, \quad (495)$$

$$\text{rot}(\vec{B} - 4\pi\vec{M}) - c^{-1} \partial_t(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = (4\pi/c)\vec{j}^{\text{своб}}. \quad (496)$$

Введя обозначения $\vec{E} + 4\pi\vec{P} \equiv \vec{D}$ и $\vec{B} - 4\pi\vec{M} \equiv \vec{H}$, можно записать полную систему динамических уравнений Максвелла в среде следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0, & \text{rot } \vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{B} &= 0, \\ \text{div } \vec{D} &= 4\pi\rho^{\text{своб}}, & \text{rot } \vec{H} - c^{-1} \partial_t \vec{D} &= (4\pi/c)\vec{j}^{\text{своб}}, \\ \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P}, & \vec{B} &= \vec{H} + 4\pi\vec{M}. \end{aligned} \right\} \quad (497)$$

Нетривиально то, что выражение под знаком ∂_t в (496) оказалось тем же самым, как и выражение под знаком div в (495), — это не было заранее очевидно.

По традиции, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ называют напряженностями, а $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — индукциями соответствующего (электрического или магнитного) поля. В такой терминологии полными полями, порождаемыми всей совокупностью источников, являются электрическая напряженность $\vec{E}$ и магнитная индукция $\vec{B}$.

При решении конкретных задач с помощью уравнений (497) нужно иметь дополнительную информацию — связь между напряженностями и индукциями. Она определяется не электродинамикой, а свойствами конкретной материальной среды. В простейшем случае однородных и изотропных диэлектриков и “диа” или “пара” магнетиков эта связь дается соотношениями $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ с не зависящими от координат константами ϵ и μ , что и будет всегда предполагаться в дальнейшем.

Скорость света и плотность потока энергии в однородной и изотропной среде. *Скорость света.* Рассмотрим уравнения (497) с нулевыми свободными источниками и с $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, а именно: $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{rot } \vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{B} = 0$, $\mu^{-1} \text{rot } \vec{B} - \epsilon c^{-1} \partial_t \vec{E} = 0$. Подействовав еще один раз операцией rot на уравнения с роторами, с учетом равенств $\text{rot rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \text{div } \vec{F} - \Delta \vec{F}$ и $\text{div } \vec{B} = \text{div } \vec{E} = 0$ получаем:

$$[\epsilon \mu c^{-2} \partial_t^2 - \Delta] \vec{E} = 0, \quad [\epsilon \mu c^{-2} \partial_t^2 - \Delta] \vec{B} = 0. \quad (498)$$

Это обычные волновые уравнения с заменой “ c ” новой константой $c' = c(\epsilon \mu)^{-1/2}$, которая, следовательно, и есть скорость света в однородной и изотропной среде с заданными значениями ϵ и μ .

Плотность потока энергии в однородной и изотропной среде. По общим правилам (см. п. 2.16) в наших задачах закон сохранения энергии для свободного (без источников) электромагнитного поля выражается уравнением непрерывности типа (11):

$$\partial_t W + \text{div } \vec{S} = 0, \quad (499)$$

в котором W — объемная плотность энергии, $\vec{S}$ — вектор плотности потока энергии.

Из анализа термодинамики в п. 3.9 мы уже имеем информацию о плотности энергии поля W в однородной и изотропной среде: для свободной энергии она дается соотношениями (290), (292), а для внутренней

энергии — соотношениями (291), (293). Свободная энергия используется при описании изотермических процессов с фиксированной температурой T , а внутренняя — при описании адиабатических процессов без передачи наружу тепла, т. е. с фиксированной энтропией S . Все эти тонкости важны, конечно, только тогда, когда величины ε и μ зависят от температуры T и эта зависимость играет существенную роль в рассматриваемой задаче.

Сказанное выше о температуре в равной мере относится, естественно, и ко второй обсуждавшейся в п. 3.9 термодинамической переменной — объему V для газовой среды. Рассматриваемый процесс может быть либо “изохорическим” (фиксирован объем V), либо “изобарическим” (фиксировано давление P). Внутренняя и свободная энергии используются при описании изохорических процессов ($V = \text{const}$), а для изобарических процессов ($P = \text{const}$) нужно переходить добавкой PV к другой паре термодинамических функций с естественной переменной P вместо V . Вклад полей в эти величины будет содержать добавки с $\partial\varepsilon/\partial V$ и $\partial\mu/\partial V$, которые нетрудно найти из приведенной в п. 3.9 формулы (286) для давления.

Таким образом, в задачах с участием термодинамики понятие плотности энергии поля W неоднозначно. Если нас интересуют задачи, в которых поле взаимодействует с другими “термодинамическими степенями свободы”, например, “электрокалорический эффект” — выделение или поглощение тепла при изменении поля или “электрострикция” — изменение объема, то тогда в каждом конкретном случае нужно, конечно, четко определить, какую именно из термодинамических функций типа энергии нужно использовать в данной задаче и чему равен вклад полей $\vec{E}$, $\vec{B}$ в эту величину.

Но если не интересоваться специально этими эффектами (как правило, количественно очень малыми), то можно пренебречь зависимостью от T , V величин ε и μ , считая их просто некоторыми заданными константами. В задачах электродинамики так обычно и поступают, а в качестве плотности энергии поля W используют соответствующие вклады в свободной энергии (290), (292):

$$W = (\varepsilon E^2 + \mu H^2)/8\pi = (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})/8\pi. \quad (500)$$

Формально это соответствует предположению об *изотермичности* ($T = \text{const}$) и *изохоричности* ($V = \text{const}$) рассматриваемого процесса.

Припимая (500) в качестве определения плотности энергии поля W , из уравнения непрерывности (499) можно найти соответствующий вектор плотности потока энергии $\vec{S}$ для свободного электромагнитного поля в однородной и изотропной среде. Из соотношения (500) с учетом $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ и

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ имеем: $\partial_t W = (\epsilon \vec{E} \partial_t \vec{E} + \mu \vec{H} \partial_t \vec{H})/4\pi$, т. е.

$$\partial_t W = (\vec{E} \partial_t \vec{D} + \vec{H} \partial_t \vec{B})/4\pi. \quad (501)$$

Входящие сюда величины $\partial_t \vec{D}$ и $\partial_t \vec{B}$ можно найти из уравнений Максвелла (497) с нулевыми источниками: $\partial_t \vec{B} = -c \operatorname{rot} \vec{E}$, $\partial_t \vec{D} = c \operatorname{rot} \vec{H}$ (поле свободное). Подставив эти величины в (501), получаем:

$$\partial_t W = c(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E})/4\pi = -(c/4\pi) \operatorname{div}[\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (502)$$

Второе равенство — следствие соотношения $\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} + \operatorname{div}[\vec{E} \times \vec{H}]$, проверку которого предоставляем читателю.

Отождествляя уравнения (499) и (502), получаем искомое выражение для вектора плотности потока энергии $\vec{S}$ в однородной и изотропной среде:

$$\vec{S} = (c/4\pi)[\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (503)$$

Этот ответ совпадает по виду с аналогичным выражением (129) для полей в вакууме.

4.8 Волноводы

Это последний параграф, в котором мы рассмотрим пример важной в приложениях конкретной динамической задачи.

Постановка задачи. Уравнения и краевые условия для полей. Мы будем понимать под волноводом бесконечную прямую трубу с металлическими стенками, заполненную однородным и изотропным диэлектриком с заданными значениями ϵ и μ . Будем считать, что волновод направлен по оси “3”, его поперечное сечение параллельно плоскости “1, 2” и одинаково по всей длине волновода. Это сечение в общем случае может быть и неодносвязным (пример — коаксиальный кабель — металлический провод, окруженный диэлектриком и внешней металлической оболочкой).

Для простоты будем считать стенки волновода идеальным металлом, внутри которого все поля равны нулю. С точки зрения физики это означает, что заряды внутри металла обладают бесконечной подвижностью, поэтому немедленно “пресекают” любую попытку проникновения внутрь металла внешнего поля путем образования компенсирующих это поле связанных зарядов и токов на границе раздела с диэлектриком. Ясно, что это

идеализация: для реальных волноводов с конечной проводимостью металлических стенок поле проникает в них на некоторую небольшую глубину, что приводит к потерям энергии при ее передаче по волноводу. Но мы в дальнейшем будем пренебрегать этим эффектом, считая стенки “идеальным металлом”.

Отсюда определяются краевые условия для полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ внутри волновода при стремлении к его границам (стенкам). Действительно, из условий сшивания (256), (257) мы знаем, что скачки $\Delta \vec{E}_t$ и $\Delta \vec{B}_n$ касательных к границе компонент $\vec{E}_t$ вектора $\vec{E}$ и нормальной к границе компоненты $\vec{B}_n$ вектора $\vec{B}$ должны быть на границе раздела равными нулю. Поскольку внутри металла поля нет ($\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$), из сказанного следует, что для полей $\vec{E}$, $\vec{B}$ внутри волновода значения $\vec{E}_t$ и $\vec{B}_n$ должны обращаться в нуль на границах с металлическими стенками:

$$\vec{E}_t \Big|_{\text{гр}} = 0, \quad \vec{B}_n \Big|_{\text{гр}} = 0. \quad (504)$$

Среду внутри волновода считаем однородной и изотропной, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, в качестве основных переменных будем использовать $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Поля внутри волновода удовлетворяют уравнениям Максвелла (497) с нулевыми источниками, т. е. в терминах $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = 0, \quad (505)$$

$$\text{rot } \vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} - \epsilon \mu c^{-1} \partial_t \vec{E} = 0, \quad (506)$$

их следствиями являются волновые уравнения (498) для $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Решения этих уравнений для полей $\{\vec{E}, \vec{B}\} \equiv \vec{F}$ ищутся в виде бегущих вдоль оси “3” волн, т. е. для комплексных версий полей

$$\vec{F}(t, \vec{x}) = \vec{F}(x_1, x_2) \exp(-i\omega t + ikx_3), \quad (507)$$

где $\vec{F}(x_1, x_2)$ — “двумерные амплитуды”, зависящие только от координат $x_{1,2}$ в плоскости поперечного сечения волновода. Частота ω считается заданной, волновой вектор k подлежит определению из решения задачи.

Для полей $\vec{E}$, $\vec{B}$ вида (507) во всех уравнениях можно сделать замены $\partial_t \rightarrow -i\omega$, $\partial_3 \equiv \partial/\partial x_3 \rightarrow ik$. После такой замены волновые уравнения (498) переходят в “двумерные уравнения Гельмгольца”:

$$[\Delta_2 + Q] \vec{E} = 0, \quad [\Delta_2 + Q] \vec{B} = 0, \quad Q \equiv \epsilon \mu \omega^2 c^{-2} - k^2, \quad (508)$$

в которых $\Delta_2 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2$ — двумерный оператор Лапласа в координатах плоскости сечения волновода, Q — некоторая неизвестная (поскольку неизвестен входящий в нее параметр k) константа. Уравнения (508) справедливы как для полных полей $\vec{E}$, $\vec{B}$ типа (507), так и для их “двумерных амплитуд”.

Сделаем для полей типа (507) замену $\partial_t \rightarrow -i\omega$ в уравнениях (506), получим:

$$\text{rot } \vec{E} = \nu \vec{B}, \quad \text{rot } \vec{B} = \lambda \vec{E}, \quad \nu \equiv i\omega/c, \quad \lambda \equiv -i\omega\epsilon\mu/c. \quad (509)$$

Отсюда следует, что по одной из двух величин $\vec{E}$ или $\vec{B}$ можно найти вторую.

Построение решения при $Q \neq 0$, TE и TM волны. Нам неизвестно значение входящей в (508) константы Q , поэтому будем рассматривать раздельно варианты с $Q \neq 0$ и с $Q = 0$. Первый из них приводит к TE и TM волнам, второй — к TEM волнам (подробнее ниже).

Рассмотрим сначала случай $Q \neq 0$ в (508). *Утверждение:* при $Q \neq 0$ роторные уравнения (509) для полей типа (507) позволяют выразить чисто алгебраически компоненты полей $\vec{E}_{1,2}$ и $\vec{B}_{1,2}$ через продольные по отношению к оси волновода компоненты $\vec{E}_3$ и $\vec{B}_3$. *Доказательство.* Конкретизируя уравнения (509) для “1, 2” компонент векторов, получаем (с этого момента для упрощения записи будем опускать знак “ $\rightarrow$ ” над трехмерными векторами E и B):

$$\begin{aligned} \nu B_1 &= \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2, & \nu B_2 &= \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3, \\ \lambda E_1 &= \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2, & \lambda E_2 &= \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3. \end{aligned} \quad (510)$$

При получении уравнений (509) и их следствий (510) была использована лишь замена $\partial_t \rightarrow -i\omega$ для функций типа (507). Сделав теперь в соотношениях (510) еще и вторую возможную для таких функций замену $\partial_3 \equiv \partial/\partial x_3 \rightarrow ik$ и перегруппировав вклады, оставляя в правых частях лишь слагаемые с E_3 и B_3 , получим следующие две пары уравнений:

$$\nu B_1 + ikE_2 = \partial_2 E_3, \quad ikB_1 - \lambda E_2 = \partial_1 B_3, \quad (511)$$

$$\lambda E_1 + ikB_2 = \partial_2 B_3, \quad ikE_1 - \nu B_2 = \partial_1 E_3. \quad (512)$$

Соотношения (511) — система двух линейных неоднородных уравнений для определения двух неизвестных B_1 и E_2 , а (512) — аналогичная

система для пары E_1 и B_2 . По коэффициентам в левых частях уравнений видно, что обе системы (511), (512) имеют одинаковый определитель $\det = -\nu\lambda - (ik)^2$. Подставив сюда известные из (509) значения ν и λ , получаем $\det = k^2 - \varepsilon\mu\omega^2c^{-2} = -Q$ с параметром Q из (508). Поскольку $Q \neq 0$ по условию, решения уравнений (511), (512) для $E_{1,2}$ и $B_{1,2}$ существуют и единственны. Они имеют следующий вид (проверку предоставляем читателю):

$$E_1 = Q^{-1}[ik\partial_1 E_3 + \nu\partial_2 B_3], \quad E_2 = Q^{-1}[ik\partial_2 E_3 - \nu\partial_1 B_3], \quad (513)$$

$$B_1 = Q^{-1}[\lambda\partial_2 E_3 + ik\partial_1 B_3], \quad B_2 = Q^{-1}[-\lambda\partial_1 E_3 + ik\partial_2 B_3] \quad (514)$$

с параметрами ν и λ из (509) и Q из (508).

Таким образом, для полного расчета полей E и B достаточно найти их продольные компоненты E_3 и B_3 , по которым прочие компоненты находятся из соотношений (513), (514). Для расчета E_3 и B_3 в нашем распоряжении имеются уравнения Гельмгольца (508) и общие краевые условия (504). Но их тогда нужно сначала переформулировать в терминах E_3 и B_3 без участия прочих компонент.

Краевые условия для E_3 и B_3 при $Q \neq 0$. На рис. 4.7 показано поперечное сечение волновода в плоскости "1, 2" (для простоты односвязное, по это несущественно, — все выводы остаются в силе и для неодносвязного сечения). Единичный вектор $\vec{n} = (n_1, n_2, 0)$ — внутренняя нормаль к

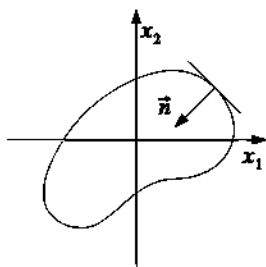


Рис. 4.7. Поперечное сечение волновода в плоскости "1, 2"

границе в произвольной точке, его компонента n_3 вдоль оси волновода равна нулю. Все последующие формулы будут относиться к полям и их производным на границе, что в дальнейшем будем просто подразумевать, опуская уточняющий символ $\Big|_{\text{гр}}$.

Из второго условия (504) с учетом $n_3 = 0$ следует, что на границе

$$\vec{B}_n = (\vec{n}\vec{B}) = n_1 B_1 + n_2 B_2 = 0. \quad (515)$$

Первое условие $\vec{E}_t = 0$ в (504) эквивалентно равенству $[\vec{n} \times \vec{E}] = 0$ на границе. Расписывая это равенство покомпонентно, получаем: $n_2 E_3 - n_3 E_2 = 0$, $n_3 E_1 - n_1 E_3 = 0$, $n_1 E_2 - n_2 E_1 = 0$. Два первых соотношения с учетом $n_3 = 0$ эквивалентны $E_3 = 0$, так что условие $\vec{E}_t = 0$ в (504) сводится к следующим двум соотношениям для полей на границе:

$$E_3 = 0, \quad n_1 E_2 - n_2 E_1 = 0. \quad (516)$$

Первое из них уже имеет нужный вид (напомним, что мы ищем краевые условия для E_3 и B_3), а из второго вместе с (515) можно получить искомое краевое условие для B_3 . Для этого подставим в эти соотношения выражения (513), (514) для $E_{1,2}$ и $B_{1,2}$ через E_3 и B_3 . Легко проверить, что это приведет к следующим двум соотношениям:

$$\begin{aligned} \lambda(n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1) E_3 + ik(n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2) B_3 &= 0, \\ ik(n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1) E_3 - \nu(n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2) B_3 &= 0. \end{aligned}$$

Это система двух линейных однородных уравнений для двух неизвестных величин $(n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1) E_3$ и $(n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2) B_3$. Ее определителем является та же величина $\det = -Q \neq 0$ (по условию), как и для уравнений (511), (512), поэтому система имеет только нулевые решения:

$$(n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1) E_3 = 0, \quad (n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2) B_3 = 0. \quad (517)$$

Второе из этих соотношений есть искомое краевое условие для B_3 , а первое можно отбросить, поскольку оно является автоматическим следствием уже установленного ранее краевого условия $E_3 = 0$ (первое соотношение (516)).

Докажем это. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2)$ — произвольная точка на границе сечения (см. рис. 4.7), $d\vec{x} = (dx_1, dx_2)$ — ее смещение вдоль границы (т. е. по касательной), вектор $d\vec{x}$ ортогонален вектору нормали $\vec{n}$. Поскольку на границе $E_3 = 0$ — постоянная величина, ее приращение $dE_3 = (dx_1 \partial_1 + dx_2 \partial_2) E_3$ при смещении вдоль границы должно быть равным нулю. Условие ортогональности $(\vec{n} d\vec{x}) = n_1 dx_1 + n_2 dx_2 = 0$ связывает величины dx_1 и dx_2 , позволяя считать одну из них произвольной, например, $dx_2 = -n_1 dx_1 / n_2$ с произвольным dx_1 . Из равенства

$dE_3 = (dx_1\partial_1 + dx_2\partial_2)E_3 = 0$ с $dx_2 = -n_1dx_1/n_2$ при произвольном dx_1 вытекает первое соотношение (517), что мы и хотели доказать.

Таким образом, при $Q \neq 0$ краевые условия для E_3 и B_3 (первое равенство в (516) и второе в (517)) имеют следующий вид:

$$E_3 \Big|_{\text{гр}} = 0, \quad \partial_n B_3 \Big|_{\text{гр}} = 0, \quad (518)$$

где $\partial_n \equiv n_1\partial_1 + n_2\partial_2$ — “нормальная производная” — проекция операции градиента ∇ на вектор нормали к границе. Во избежание недоразумений мы привели в (518) уточняющий символ $\Big|_{\text{гр}}$. Первое условие (518) соответствует задаче Дирихле для E_3 , второе — задаче Неймана для B_3 .

Общие выводы, ТЕ и ТМ волны. Итак, при $Q \neq 0$ в (508) нужно вычислять лишь величины E_3 и B_3 , по которым прочие компоненты векторов E и B определяются соотношениями (513), (514). Величины $\{E_3, B_3\} \equiv \phi$ ищутся из двумерных уравнений Гельмгольца (508):

$$\Delta_2 \phi = -Q\phi, \text{ где } \phi = E_3 \text{ или } B_3 \quad (519)$$

с краевыми условиями (518):

$$\phi \Big|_{\text{гр}} = 0 \text{ для } \phi = E_3, \quad \partial_n \phi \Big|_{\text{гр}} = 0 \text{ для } \phi = B_3. \quad (520)$$

Под ϕ в (519) понимаются двумерные амплитуды $\phi(x_1, x_2)$ в (507) для соответствующих величин E_3 или B_3 , $\Delta_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ — двумерный оператор Лапласа по координатам $x_{1,2}$ в плоскости сечения волновода.

Для линейной задачи (519) справедлив принцип суперпозиции, поэтому можно рассматривать отдельно два разных класса решений: *ТЕ* и *ТМ* волны. *Определение:* *ТЕ* волной называется решение, для которого $E_3 = 0$, $B_3 \neq 0$, т. е. электрическое поле E поперечно по отношению к оси волновода, а *ТМ* волной — решение, для которого $E_3 \neq 0$, $B_3 = 0$, т. е. поперечно магнитное поле B (буква “Т” в обозначениях от английского слова “transversal”). Для удобства ссылок запишем сказанное выше в виде нумеруемой формулы:

$$\begin{aligned} \text{ТЕ волна: } & E_3 = 0, \quad B_3 \neq 0; \\ \text{ТМ волна: } & E_3 \neq 0, \quad B_3 = 0. \end{aligned} \quad (521)$$

Общее решение — произвольная суперпозиция волн этих двух типов.

Возможные значения амплитуд ϕ для волны заданного типа ищутся из уравнения (519) с пущным краевым условием (520). Решение неоднозначно, так как (519) — типичная задача на собственные значения, в которой ищутся как функция ϕ , так и (заранее неизвестное) число Q . Полным решением задачи является нахождение бесконечного набора ее “собственных функций” ϕ_α и соответствующих “собственных чисел” $-Q_\alpha$, для которых

$$\Delta_2 \phi_\alpha = -Q_\alpha \phi_\alpha, \quad (522)$$

индекс α нумерует такие решения.

Из математики известно, что задача на собственные значения (522) для оператора Лапласа в конечной области с условиями Дирихле или Неймана на границах имеет дискретный спектр, т. е. счетное множество решений для собственных функций ϕ_α и соответствующих собственных чисел $-Q_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$. Функцию (507) с конкретной амплитудой ϕ_α называют “модой волны”, общее решение — суперпозиция всевозможных мод с произвольными коэффициентами. Каждой из мод “ α ” соответствует определенное собственное значение $-Q_\alpha$ в (522), по которому из определения Q в (508) находится волновое число k_α и фазовая скорость волны ω/k_α для данной моды.

Все эти вопросы мы будем обсуждать подробнее впоследствии, а сейчас перейдем к повому классу решений — *ТЕМ* волнам.

Построение решения при $Q = 0$, *ТЕМ* волны. Обсуждавшиеся выше *ТЕ* и *ТМ* волны возможны лишь при $Q \neq 0$ в уравнении (508). Теперь мы обсудим особый случай $Q = 0$, когда реализуются другие решения, а именно,

$$\text{ТЕМ волны: } E_z = 0, \quad B_z = 0, \quad (523)$$

для которых оба поля E и B поперечны по отношению к оси волновода.

Анализ таких решений содержит довольно длинную цепочку отдельных шагов, которые для удобства читателя мы будем нумеровать.

1. Из равенства $Q = 0$ в (508) следует, что связь между ω и k для *ТЕМ* волны точно такая же, как для волн в неограниченной среде: $\omega/k = c(\epsilon\mu)^{-1/2}$, т. е. фазовая скорость *ТЕМ* волны ω/k совпадает со скоростью света в неограниченной среде с заданными значениями ϵ и μ .

2. Из уравнений (508) с $Q = 0$ следует, что двумерные амплитуды всех компонент векторов E и B — двумерные гармонические функции на

сечении волновода:

$$\Delta_2 E_i = 0, \quad \Delta_2 B_i = 0 \text{ для любого } i = 1, 2, 3. \quad (524)$$

3. Согласно (524) амплитуда E_3 — гармоническая функция, а из условия $\vec{E}_t = 0$ в (504) следует, что на границе $E_3 = 0$. Ввиду единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа заключаем, что

$$E_3 = 0 \quad (525)$$

на всем сечении волновода.

4. *Утверждение:* из (525) и уравнений (511), (512) следует, что на всем сечении волновода

$$\partial_1 B_3 = \partial_2 B_3 = 0, \quad \text{т. е. } B_3 = \text{const.} \quad (526)$$

Доказательство: рассмотрим, например, пару уравнений (511). Равенство нулю определителя $\det = -Q = 0$ этой системы означает, что левые части уравнений взаимно пропорциональны, следовательно, должны быть пропорциональными и их правые части. Одна из них равна нулю в силу соотношения (525), следовательно, должна быть равной нулю и вторая, т. е. $\partial_1 B_3 = 0$. Апалогичные соображения для пары уравнений (512) приводят к равенству $\partial_2 B_3 = 0$, что и доказывает утверждение (526).

5. Таким образом, мы доказали, что правые части уравнений (511), (512) для $ТЕМ$ волны равны нулю, следовательно, равны нулю и их левые части. Отсюда вытекают следующие простые связи между “1, 2” компонентами векторов E и B : $B_1 = -(ik/\nu)E_2$, $B_2 = (ik/\nu)E_1$ с $\nu = i\omega/c$ из (509). Учитывая уже доказанное для $ТЕМ$ волны соотношение $\omega/k = c(\epsilon\mu)^{-1/2}$, получим $ik/\nu = ck/\omega = (\epsilon\mu)^{1/2}$. Итого, для $ТЕМ$ волны:

$$B_1 = -\alpha E_2, \quad B_2 = \alpha E_1, \quad \alpha \equiv (\epsilon\mu)^{1/2}. \quad (527)$$

6. Покажем теперь, что

$$B_3 = 0 \quad (528)$$

на всем сечении волновода. Для этого воспользуемся первым соотношением (509) $\text{rot } \vec{E} = \nu \vec{B}$ и перейдем к его интегральной форме для потоков через сечение в направлении оси волновода: $\iint (\text{rot } \vec{E})_n ds = \nu \iint \vec{B}_n ds$. Интеграл в левой части по теореме Стокса сводится к циркуляции вектора $\vec{E}$ по границе сечения, следовательно, равен нулю в силу условия $\vec{E}_t = 0$ (504)

на границе. Для интеграла в правой части $\vec{B}_n = B_3 = \text{const}$ согласно (526), поэтому $\iint \vec{B}_n ds = B_3 x$ площадь сечения. Поскольку эта величина должна быть равной нулю ввиду равенства нулю левой части, заключаем, что $B_3 = 0$ на всем сечении.

Доказанные выше равенства (525) и (528) оправдывают определение (523) *ТЕМ* волны.

7. Рассматривая компоненту “3” роторных уравнений (509) с учетом $E_3 = B_3 = 0$, получаем:

$$\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 = 0. \quad (529)$$

В дальнейшем будем понимать эти соотношения как равенства для двумерных амплитуд $F(x_1, x_2)$ соответствующих величин (507).

Из математики известно, что соотношения типа (529) являются двумерными аналогами утверждения “ротор вектора равен нулю”, откуда следует, что сам вектор — градиент некоторого скаляра. Применительно к соотношениям (529) это означает, что двумерные амплитуды полей $E_{1,2}$ и $B_{1,2}$ являются градиентами некоторых потенциалов ψ, Φ :

$$E_i = \partial_i \psi, \quad B_i = \partial_i \Phi, \quad i = 1, 2. \quad (530)$$

Все эти величины понимаются как функции переменных $x_{1,2}$ в плоскости сечения волновода.

8. Из уравнений $\text{div } \vec{E} = 0$ и $\text{div } \vec{B} = 0$ (505) с учетом $E_3 = B_3 = 0$ следует, что

$$\Delta_2 \psi = 0, \quad \Delta_2 \Phi = 0, \quad (531)$$

т. е. оба потенциала ψ, Φ в (530) — двумерные гармонические функции.

9. Обсудим теперь важное различие между “электрическим” потенциалом ψ и “магнитным” потенциалом Φ . *Утверждение:* функция ψ однозначна всегда, а однозначность Φ гарантирована только для односвязного сечения. Для задач с неодносвязным сечением типа коаксиального кабеля функция Φ в общем случае многозначна.

Доказательство. Согласно (530), градиентами потенциалов $\{\psi, \Phi\} = F$ являются поля $E_{1,2}$ и $B_{1,2}$, которые всегда однозначны. Приращение потенциала F при переходе от одной точки к другой внутри сечения есть интеграл $\int dx_i \partial_i F$ по контуру, соединяющему эти две точки. Выбор такого контура, естественно, неоднозначен, но условия (529) гарантируют,

что значение интеграла не изменяется при любой непрерывной деформации контура. Поэтому для односвязной области, в которой любой контур может быть непрерывно деформирован в любой другой, приращение потенциала, следовательно, и сам потенциал — однозначная функция. Но если сечение неодносвязно, т. е. имеет внутри одну или несколько “дыр” (например, от центрального провода в коаксиальном кабеле), то проблема усложняется, так как наши контуры могут обходить “дыру” с разных сторон и тогда не переводятся друг в друга непрерывной деформацией. В такой ситуации нужно знать, чему равна разность интегралов для двух топологически различных вариантов обхода “дыры”. Ясно, что эта разность равна интегралу $\int dx_i \partial_i F$ по окружающему “дыру” замкнутому контуру. Эта величина не меняется при непрерывной деформации контура, поэтому его можно стянуть на границу “дыры”, сведя тем самым интеграл к циркуляции вектора $\partial_i F$ по границе.

Все сказанное до сих пор в равной мере справедливо для обоих потенциалов $F = \{\psi, \Phi\}$, для первого из них $\partial_i \psi = E_i$, для второго $\partial_i \Phi = B_i$ согласно (530). С этого момента речь пойдет о различиях между этими двумя потенциалами.

Для потенциала ψ циркуляция его градиента $\partial_i \psi = E_i$ по границе “дыры” равна нулю в силу краевого условия $\vec{E}_t = 0$ (504). Отсюда следует, что потенциал ψ однозначен даже при неодносвязном сечении.

Для магнитного потенциала Φ краевое условие $\vec{B}_n = 0$ в (504) не запрещает иметь отличную от нуля циркуляцию $\int dx_i \partial_i \Phi = \int dx_i B_i$ по границе “дыры”, и эта величина в общем случае не равна нулю. Ее можно найти из интегральной формы содержащего $\text{rot } \vec{H}$ уравнения Максвелла (497) с заменой в нем $\partial_t \rightarrow -i\omega$ для рассматриваемых нами гармонических функций и $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. В итоге получим, что искомая циркуляция вектора $\vec{B}$ по границе “дыры” содержит два вклада. Один из них кратен потоку вектора $\vec{E}$ вдоль волновода через сечение самой “дыры”, второй кратен полному току I , протекающему через это сечение (например, по центральному проводу в коаксиальном кабеле). Первый вклад равен нулю, так как внутри “дыры” (металл) поля нет, т. е. $E = 0$. Учитывая только второй вклад, из (497) получаем:

$$\mu^{-1} \int dx_i B_i = (4\pi/c)I, \quad (532)$$

где I — полный ток через сечение “дыры”, а интеграл в левой части — циркуляция вектора $B_i = \partial_i \Phi$ по границе этого сечения. Величина (532) в

общем случае отлична от нуля, следовательно, при неодносвязном сечении потенциал Φ в (530) в общем случае — многозначная функция.

10. *Краевые условия для потенциалов ψ , Φ .* Согласно (504), на границе $\vec{E}_t = 0$ и $\vec{B}_n = 0$. Первое из этих условий эквивалентно равенству $[\vec{n} \times \vec{E}] = 0$, а второе — $(\vec{n}\vec{B}) = 0$, что сводится к двум соотношениям (516) для E и к соотношению (515) для B :

$$E_3 = 0, \quad n_1 E_2 - n_2 E_1 = 0, \quad n_1 B_1 + n_2 B_2 = 0. \quad (533)$$

Первое из этих краевых условий для TEM волны с $E_3 = 0$ выполняется автоматически, а два другие при подстановке (530) сводятся к следующим двум условиям для потенциалов ψ , Φ :

$$(n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1) \psi = 0, \quad (n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2) \Phi = 0. \quad (534)$$

Они аналогичны краевым условиям для E_3 и B_3 в (517). Условие для Φ в (534) соответствует граничной задаче Неймана $\partial_n \Phi = 0$, а условие (534) для ψ эквивалентно граничному условию $\psi = \text{const}$, что уже доказывалось ранее (см. текст после формул (517)).

Таким образом, краевые условия для потенциалов ψ , Φ в соотношениях (530) для TEM волны имеют следующий вид:

$$\psi \Big|_{\text{гр}} = \text{const}, \quad \partial_n \Phi \Big|_{\text{гр}} = 0, \quad (535)$$

первое из них соответствует задаче Дирихле для ψ , второе — задаче Неймана для Φ .

11. *Резюме.* Итого, для TEM волны потенциалы ψ , Φ в (530) являются двумерными гармоническими функциями на сечении волновода с краевыми условиями (535). Из математики известно, что обе этих краевых задачи для конечной односвязной области имеют только тривиальные решения $\psi = \text{const}$ или $\Phi = \text{const}$ на всем сечении, которым соответствуют нулевые поля (530). Отсюда вытекает

Главный вывод: TEM волны могут существовать только в волноводах с неодносвязным сечением типа коаксиального кабеля.

Это можно пояснить следующим образом: если граница только одна и на ней задано значение $\psi = \text{const}$, то поле ψ внутри сечения есть та же самая константа ввиду единственности решения задачи Дирихле. Но при неодносвязном сечении есть несколько границ с разными значениями

$\psi = \text{const}$ на каждой из них, что и позволяет иметь нетривиальные решения задачи Дирихле.

Отметим также, что при расчете характеристик *ТЕМ* волны достаточно найти лишь один из двух потенциалов ψ или Φ . По нему из (530) находится одно из полей E или B , а по нему из (527) — второе поле. Удобнее, конечно, вычислять потенциал ψ ввиду его гарантированной однозначности. Рассмотрим теперь конкретный пример такой задачи.

ТЕМ волна в коаксиальном кабеле. Поперечное сечение коаксиального кабеля представляет собой две концентрические окружности с заданными радиусами $R_1 < R_2$. Само сечение волновода — заполненный диэлектриком круговой слой $R_1 \leq r \leq R_2$, внутренняя область $r \leq R_1$ и внешняя область $r \geq R_2$ — идеальный металл. Решение будем искать для однозначной функции ψ , считая ее значения на границах $r = R_1$ и $r = R_2$ некоторыми заданными и в общем случае различными (иначе решение тривиально) константами.

Ввиду очевидной осевой симметрии такой краевой задачи ясно, что потенциал ψ зависит только от радиальной переменной r в полярных координатах r, φ ($x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$). Двумерный оператор Лапласа Δ_2 в этих координатах имеет вид

$$\Delta_2 = \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\varphi^2, \quad (536)$$

где $\partial_r \equiv \partial/\partial r, \partial_\varphi \equiv \partial/\partial \varphi$. Решение двумерного уравнения Лапласа $\Delta_2 \psi = 0$ с $\psi = \psi(r)$ и оператором Δ_2 из (536) имеет вид

$$\psi(r) = a \ln r + b \quad (537)$$

с произвольными константами a и b . Из (537) и (530) находим амплитуды

$$E_i = \partial_i \psi = a \partial_i \ln r = a r^{-1} \partial_i r = a r^{-1} n_i = a r^{-2} x_i, \quad i = 1, 2. \quad (538)$$

По ним из соотношений (527) находим

$$B_1 = -\alpha E_2 = -\alpha a r^{-2} x_2, \quad B_2 = \alpha E_1 = \alpha a r^{-2} x_1 \quad (539)$$

с коэффициентом a из (537) и $\alpha = (\varepsilon \mu)^{1/2}$ из (527).

По известным из (539) величинам $B_i = \partial_i \Phi$ можно найти соответствующий потенциал Φ . Легко проверить (предоставляем сделать это читателю), что $\Phi = \alpha a \varphi$, где $\varphi = \arctg(x_1/x_2)$ — угловая переменная в полярных координатах ($x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, r^2 = x_1^2 + x_2^2, \varphi = \arctg(x_1/x_2)$). Наша

функция $\Phi = \alpha a \varphi$, очевидно, неоднозначна, так как переменная φ при обходе внутренней “дыры” приобретает добавку 2π .

Коэффициент a в (537) можно выразить через протекающий по центральному проводу ток I с помощью соотношения (532). Циркуляция вектора B в левой части (532) равна приращению $\Delta\Phi$ потенциала Φ при обходе контура, в нашем случае $\Delta\Phi = 2\pi\alpha a$. Поэтому из (532) получаем $\mu^{-1}2\pi\alpha a = (4\pi/c)I$, что и дает искомую связь между параметрами a и I .

По известным полям E и B внутри волновода можно найти усредненный по времени вектор плотности потока энергии $\langle \vec{S} \rangle$ (457). Интегрируя величину $\langle \vec{S} \rangle_n$ по сечению, найдем полную мощность, передаваемую по волноводу (в нашем приближении потерь нет). В итоге получим формулы, связывающие энергетические характеристики с параметрами типа a или I , выразив их тем самым через измеримую экспериментально величину, — передаваемую по волноводу мощность.

На этом мы закончим обсуждение TEM волн и вернемся к TE и TM волнам.

TE и TM волны: описание мод, фазовая скорость. TE и TM волны (521) могут существовать и в волноводах с односвязным сечением при $Q \neq 0$ в (508). Ранее было показано, что все параметры TE волны определяются амплитудой B_3 , а для TM волны — амплитудой E_3 . Эти амплитуды определяются из двумерных уравнений Гельмгольца (519) с нужным (одним из двух) краевым условием (520), что сводится к задаче на собственные значения (522) для двумерного оператора Лапласа Δ_2 на сечении волновода S . Сейчас мы обсудим все это подробнее.

Задача на собственные значения обычно ставится для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Таким пространством в нашем случае является $L_2(S)$ — множество заданных на сечении волновода S комплексных функций $\psi(x)$ с $x \equiv x_1, x_2$, квадратично интегрируемых на S : $\iint ds |\psi(x)|^2 < \infty$, здесь и далее $ds = dx_1 dx_2$ — дифференциал площади, интеграл берется по сечению волновода S . Скалярное произведение (ψ_1, ψ_2) любых двух таких функций определяется соотношением

$$(\psi_1, \psi_2) = \iint ds \psi_1^*(x) \psi_2(x). \quad (540)$$

Областью определения D двумерного оператора Лапласа Δ_2 (в дальнейшем обозначаем $\Delta_2 \equiv \Delta$, термин “двумерный” подразумевается) для любой из наших двух краевых задач является множество функций

$\psi \in L_2(S)$, удовлетворяющих нужному (одному из двух) краевому условию (520) и условию $\Delta\psi \in L_2(S)$, т. е. функция $\Delta\psi$ также должна быть квадратично интегрируемой на сечении.

Для любых двух функций $\psi_{1,2}$ справедлива следующая “формула Грина” (при условии сходимости входящих в нее интегралов):

$$\begin{aligned} \iint ds \vec{\nabla} \psi_1^* \cdot \vec{\nabla} \psi_2 &= \int d\ell \psi_1^* \cdot \partial_n \psi_2 - \iint ds \psi_1^* \cdot \Delta \psi_2 = \\ &= \int d\ell \partial_n \psi_1^* \cdot \psi_2 - \iint ds \Delta \psi_1^* \cdot \psi_2, \end{aligned} \quad (541)$$

где $\int d\ell \dots$ — интеграл по границе сечения, $d\ell$ — не зависящий от направления обхода дифференциал длины контура. Если обе функции $\psi_{1,2}$ удовлетворяют первому или второму краевому условию (520), то контурные интегралы по границе в (541) исчезают, поскольку в них один из двух множителей (ψ или $\partial_n \psi$) равен нулю. Поэтому для любых двух функций $\psi_{1,2}$ из области определения оператора Δ в наших краевых задачах (см. выше) соотношения (541) в обозначениях (540) принимают следующий вид:

$$(\vec{\nabla} \psi_1, \vec{\nabla} \psi_2) = -(\psi_1, \Delta \psi_2) = -(\Delta \psi_1, \psi_2). \quad (542)$$

Второе из этих равенств означает, что Δ — симметричный оператор на своей области определения D , т. е. в скалярном произведении его можно переносить с одного сомножителя на другой без изменения ответа. Первое равенство (542), если положить в нем $\psi_1 = \psi_2 \equiv \psi$, доказывает, что оператор Лапласа Δ “отрицательно определен”:

$$(\psi, \Delta \psi) = -(\vec{\nabla} \psi, \vec{\nabla} \psi) \leq 0 \quad (543)$$

ввиду очевидной неотрицательности величины $(\vec{\nabla} \psi, \vec{\nabla} \psi)$ согласно определению скалярного произведения (540).

Вернемся теперь к нашей задаче на собственные значения (522):

$$\Delta \phi_\alpha = -Q_\alpha \phi_\alpha \quad (544)$$

для двумерного оператора Лапласа $\Delta \equiv \Delta_2$. Уравнение (544) имеет очевидное решение $\phi_\alpha = \text{const}$, $Q_\alpha = 0$, но его нужно отбросить, поскольку у нас $Q \neq 0$ по условию.

Из (543) следует, что все собственные значения $-Q_\alpha$ оператора Лапласа в (544) отрицательны, т. е. $Q_\alpha > 0$. Действительно, умножив (в смысле

скалярного произведения) обе части равенства (544) слева на ϕ_α , получим $(\phi_\alpha, \Delta\phi_\alpha) = -Q_\alpha(\phi_\alpha, \phi_\alpha) \leq 0$ в силу (543). Отсюда с учетом очевидной положительности “квадрата нормы” $(\phi_\alpha, \phi_\alpha)$ следует, что для всех отличных от нуля собственных значений задачи (544) $Q_\alpha > 0$.

Из симметричности оператора Δ (второе равенство (542)) следует, что любые две собственные функции ϕ_α и ϕ_β , для которых $Q_\alpha \neq Q_\beta$, взаимно ортогональны. Действительно, из симметричности Δ имеем $(\phi_\beta, \Delta\phi_\alpha) = (\Delta\phi_\beta, \phi_\alpha)$. Подставив сюда $\Delta\phi_\alpha = -Q_\alpha\phi_\alpha$ и $\Delta\phi_\beta = -Q_\beta\phi_\beta$, получим $Q_\alpha(\phi_\beta, \phi_\alpha) = Q_\beta(\phi_\beta, \phi_\alpha)$, откуда следует

$$(\phi_\beta, \phi_\alpha) = 0 \text{ при } Q_\alpha \neq Q_\beta. \quad (545)$$

Это общее свойство собственных функций любого симметричного оператора в любом гильбертовом пространстве.

В дальнейшем мы будем ссылаться без доказательства на сведения из математики. Известно, что обе наши краевые задачи (520) для оператора Лапласа в ограниченной области сечения имеют дискретный спектр, т. е. нумерующий Q_α индекс можно считать целочисленным: $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ Нумерацию естественно выбрать в порядке возрастания чисел Q_α :

$$0 < Q_1 < Q_2 < \dots, \quad (546)$$

причем известно, что в этой бесконечной последовательности числа Q_α нигде не сгущаются и неограниченно возрастают. Подчеркнем, что они определяются только геометрией волновода и не зависят от передаваемой по нему мощности. Минимальным является некоторое положительное число Q_1 , поскольку возможное значение $Q = 0$ исключено по условиям задачи. Каждому Q_α соответствует одна или несколько (если собственное значение “вырождено”) собственных функций ϕ_α . Они играют роль двумерных амплитуд в (507), решение (507) с заданной амплитудой ϕ_α называют “модой α ”, общее решение — произвольная суперпозиция мод.

Из определения параметра Q в (508) следует, что при заданной частоте ω для любой моды “ α ” с известным Q_α однозначно определяется соответствующее волновое число k_α :

$$k_\alpha^2 = \epsilon\mu\omega^2 c^{-2} - Q_\alpha. \quad (547)$$

Получаемое отсюда значение k_α^2 может быть как положительным, так и отрицательным, поскольку числа Q_α с ростом номера α неограниченно

возрастают. Если $k_\alpha^2 > 0$, то величина k_α вещественна и решение (507) — бегущая волна, как и требуется. Если же $k_\alpha^2 < 0$, то k_α — мнимое число, тогда решение (507) затухающее (растущее явно “нефизично”), т. е. такая волна существовать не может.

Таким образом, по волноводу могут передаваться только те моды, для которых в (547) $k_\alpha^2 > 0$. Ввиду неограниченного роста чисел Q_α ясно, что для любой фиксированной частоты ω распространяться по волноводу может лишь некоторое конечное число “младших мод”, — те, для которых в (547) $k_\alpha^2 > 0$.

Удобно ввести соответствующие модам “ α ” *собственные частоты* ω_α , определив их соотношением

$$Q_\alpha = \varepsilon\mu\omega_\alpha^2 c^{-2}. \quad (548)$$

Тогда для волнового числа k_α в (547) имеем $k_\alpha^2 = \varepsilon\mu(\omega^2 - \omega_\alpha^2)c^{-2}$, т. е.

$$k_\alpha = c^{-1}[\varepsilon\mu(\omega^2 - \omega_\alpha^2)]^{1/2}. \quad (549)$$

Отсюда следует, что при заданной частоте ω по волноводу могут распространяться только те моды, для которых $\omega_\alpha < \omega$. Минимальной является собственная частота $\omega_1 > 0$, поэтому передача сигнала по волноводу возможна только при $\omega > \omega_1 > 0$ (отметим, что для *ТЕМ* волн такого ограничения не было, — эти волны могут передавать сигнал с любой сколь угодно малой частотой ω). Обычно конструкцию волновода и частоту ω подбирают так, чтобы $\omega_1 < \omega < \omega_2$, — тогда по волноводу распространяется только “самая младшая” мода с собственной частотой ω_1 (что, видимо, уменьшает помехи при передаче сигнала).

Фазовая скорость волны. Пусть $\omega > \omega_\alpha$, так что мода “ α ” может распространяться по волноводу. Ее фазовая скорость $v_\alpha = \omega/k_\alpha$ легко находится из выражения для k_α в (549):

$$v_\alpha = \omega/k_\alpha = c'[1 - \omega_\alpha^2/\omega^2]^{-1/2}, \quad c' \equiv c(\varepsilon\mu)^{-1/2}, \quad (550)$$

где c' — фазовая скорость волны в неограниченной среде с заданными значениями ε и μ . Из (550) следует, что $v_\alpha > c'$ и что $v_\alpha \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \omega_\alpha$. Таким образом, в волноводe фазовая скорость волны может быть сколь угодно большой, превышая скорость света в неограниченной среде.

Здесь нет противоречия с общеизвестным правилом “любая скорость не может превышать скорости света”, поскольку в нем речь идет о скоростях

движения материальных тел или о других процессах с передачей энергии, в которых можно экспериментально измерить скорость этой передачи. Фазовая скорость волны, не имеющая прямого отношения к скорости передачи какой-либо реально измеримой величины, не обязана подчиняться этому правилу.

ТЕ и ТМ волны в волноводах с односвязным прямоугольным или круговым сечением. Прямоугольное сечение. Пусть сечение волновода — прямоугольник с длинами сторон $a > b$. Направим ось x_1 в плоскости сечения вдоль длинной стороны прямоугольника, а ось x_2 — вдоль короткой.

Для ТЕ волны в уравнении (519) $\phi = B_3$ с условием Неймана $\partial_n \phi = 0$ (520) на границе. Отсюда ясно, что собственные функции ϕ_α в (544) для данной краевой задачи имеют следующий вид:

$$\phi_\alpha \equiv \phi_{nm} = A_{nm} \cos(\pi n x_1 / a) \cos(\pi m x_2 / b), \quad (551)$$

роль нумерующего индекса α играет пара неотрицательных целых чисел $\alpha = (n, m)$, A_{nm} в (551) — произвольный нормировочный множитель. Из равенства $\partial_x^2 \cos(px) = -p^2 \cos(px)$ легко находятся соответствующие функциям (551) собственные значения $-Q_\alpha$:

$$Q_\alpha \equiv Q_{nm} = \pi^2(n^2/a^2 + m^2/b^2). \quad (552)$$

При $n \geq 0$ и $m \geq 0$ минимальное значение $Q = 0$ в (552) соответствует $n = m = 0$, но оно исключается для ТЕ и ТМ волн. Из прочих величин (552) при $a > b$ наименьшим является $Q_{10} = \pi^2/a^2$, соответствующая мода волны обозначается через TE_{10} .

Для ТМ волн в (519) $\phi = E_3$ с условием Дирихле $\phi = 0$ на границе. Собственные функции ϕ_α для этой задачи получаются из (551) простой заменой косинусов на синусы:

$$\phi_\alpha \equiv \phi_{nm} = A_{nm} \sin(\pi n x_1 / a) \sin(\pi m x_2 / b), \quad (553)$$

причем теперь $n \geq 1$, $m \geq 1$, так как синусы в (553) обращаются в нуль при $n = 0$ или при $m = 0$ (а собственные функции, по условию, не могут быть равными нулю).

Для функций (553) собственные значения $-Q_\alpha = -Q_{nm}$ в (544) определяются тем же соотношением (552), как и для функций (551), но теперь с условием $n \geq 1$, $m \geq 1$. Поэтому для ТМ волн $Q_{nm} > Q_{10}$, так что наименьшую собственную частоту имеет TE_{10} волна.

В заключение добавим, что для квадратного сечения с $a = b$ в задаче есть “вырождение”, поскольку разным модам ϕ_{nm} и ϕ_{mn} соответствуют тогда одинаковые значения $Q_{nm} = Q_{mn}$.

Круговое сечение. Рассмотрим цилиндрический волновод, сечение которого — круг радиуса R . Эту задачу естественно рассматривать в полярных координатах r, φ , в которых двумерный оператор Лапласа имеет вид (536). Любые однозначные в круге $r < R$ функции разлагаются по гармоникам $\exp(im\varphi)$ с произвольным целым числом m или, эквивалентно, по системе $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$ с $m \geq 0$. Решения уравнения Гельмгольца (519) $[\Delta + Q]\phi = 0$ с оператором Δ из (536) будем искать в виде $\phi(r, \varphi) = f(r) \exp(im\varphi)$, что приводит к уравнению

$$[\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - m^2r^{-2} + Q]f(r) = 0 \quad (554)$$

для неизвестной функции $f(r)$. Уравнение (554) заменой переменной $r = Q^{-1/2}z$ сводится к хорошо известному уравнению Бесселя, поэтому двумя линейно независимыми решениями уравнения (554) являются функция Бесселя $J_m(Q^{1/2}r)$ и функция Неймана $N_m(Q^{1/2}r)$ с $m \geq 0$. Функция Неймана сингулярна при $r = 0$ (логарифмическая особенность), поэтому ее нужно отбросить.

Таким образом, кандидатами на роль ϕ_α в цилиндрическом волноводе являются функции

$$\phi \propto \sin(m\varphi)J_m(Q^{1/2}r) \text{ и } \cos(m\varphi)J_m(Q^{1/2}r) \text{ с } m \geq 0. \quad (555)$$

До сих пор мы рассматривали решения уравнения Гельмгольца (519) с произвольным параметром $Q > 0$ без учета краевых условий (520). Их учет позволяет найти возможные значения параметра Q в (555), т. е. спектр собственных значений задачи (544). Проделаем это.

Начнем с TM волн, для которых в уравнении (519) $\phi = E_z$ с условием $\phi = 0$ на границе $r = R$. Это значит, что при $r = R$ аргумент $Q^{1/2}R$ в (555) должен быть одним из отличных от нуля корней z_{mn} функции Бесселя $J_m(z)$ (т. е. $J_m(z_{mn}) = 0$, индекс $n = 1, 2, 3, \dots$ нумерует корни z_{mn} функции $J_m(z)$ в порядке их возрастания). Отсюда получаем:

$$Q_\alpha \equiv Q_{mn} = z_{mn}^2 R^{-2}, \quad (556)$$

по этим величинам из соотношения (548) находятся собственные частоты ω_{mn} мод “ mn ” TM волн.

Значения z_{mn} известны и приводятся в математических таблицах, например, в справочнике [4] (при современной технике их можно вычислять с помощью компьютера). Числа z_{mn} увеличиваются с ростом индексов m и n , наименьшим из них является $z_{01} \cong 2,405$, т. е. первый корень функции $J_0(z)$, он и определяет наименьшую собственную частоту для TM волн.

Для TE волн в уравнении (519) $\phi = B_3$ с условием Неймана $\partial_n \phi = 0$ на границе $r = R$. Собственные функции ϕ_α для данной задачи имеют ту же форму (555), но теперь возможные значения параметра Q (т. е. собственные частоты мод) определяются из требования равенства нулю при $r = R$ не самой функции $J_m(z)$ с $z = Q^{1/2}R$, а ее производной $J'_m(z)$ в этой точке. Все различие — замена корней z_{mn} функции $J_m(z)$ корнями z'_{mn} ее производной $J'_m(z)$. Выражения для Q_{mn} получаются из (556) заменой $z_{mn} \rightarrow z'_{mn}$, отсюда находятся собственные частоты для всех мод TE волн.

На этом мы кончаем обсуждение волноводов и весь этот курс в целом. Ясно, что его можно было бы расширить, так как есть много важных и интересных вопросов, которые мы вообще не затрагивали. Но такое расширение противоречило бы основной идее — “общий курс для одного семестра”. Поэтому мы можем лишь отослать заинтересованного в дополнительной информации читателя к приведенному в конце списка литературы.

Литература

- [1] *Джесксон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965. — 702 с.
- [2] *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1967. — 460 с.
- [3] *Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А.* Электродинамика. — М.: Наука, 1978. — 351 с.
- [4] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, перераб. — М.: Физматгиз, 1962. — 1100 с.

Предметный указатель

Ссылки указывают на основные упоминания понятий: определения, важные примеры применения, свойства и т. п. На страницах, выделенных курсивом, содержится определение или введение понятия.

Антенна 226, 237, 239, 240–246

Антенна полноволновая 245

Антенна полуволновая 245

Вариационные производные

функционала 92, 94, 167,
171, 173

Вектор 16, 66

Вектор ковариантный 67

Вектор контравариантный 67

Вектор плотности компонент импульса
100–102, 104

Вектор плотности потока энергии
100–102, 104

Вектор поляризации 154–159, 161–163,
246–251

Волновая зона 234–235

Волновод 253, 253–271

Волновой вектор 162, 199, 200, 207, 254

Волновой пакет 33, 202

TE волны 255, 258, 265–271

TEM волны 255, 259, 263, 259–265

TM волны 255, 258, 265–271

Гамиль преобразования 45, 46–49

Гармонический источник 226–227, 229,
235–238, 247–250

Гармонический квадрупольный
излучатель 239–240

Градиент 20

Группа 37

Группа *Гамиль* 45

Группа *Лоренца* 49–57

Даламбера оператор 30

Действие 91–95

Дельта (δ)-функция 110–111

Диаграмма направленности 219–223,
223–226, 235–240, 245, 246

Дивергенция 20

Дипольное приближение 230

Дисперсия 162

Дисперсия пространственная 162

Дисперсия частотная 162

Диэлектрики 153–163, 179

Диэлектрическая проницаемость 158

Жордана лемма 210

Задача *Дирихле* 258, 259, 263

Задача *Неймана* 258, 259, 263

Закон *Ампера* 15

Закон *Кулона* 15, 23

Закон сохранения заряда 28

Закон сохранения энергии 99, 251

Закон электромагнитной индукции
Фарадея 15, 23

Излучатель гармонический
квадрупольный
см. Гармонический
квадрупольный излучатель

Излучатель дипольный 235

Излучатель магнитный 238

Излучатель синфазный 237

Индекс свободный 18

Индекс суммирования 17

Индукция 157, 158, 177, 251

Интенсивность излучения 219–221,
221–223, 235–240, 244–246

Истинный тензор 42

Калибровка кулоновская 32, 33

Калибровка лоренцовская 32, 33

Калибровочная инвариантность 80

Калибровочные преобразования 31

Калибровочные условия 31, 80

Квадрупольный момент 124, 234, 239

Краевые условия 24–28, 159–161, 254,
256–258, 263

Кронекера символ 16

Крутящий момент 138, 139, 141

Лагранжиан 91, 112

Лагранжиан взаимодействия частицы
с полем 109–112

Лагранжиан свободной частицы
релятивистский 105–107

Лармора формула 224

Лоренца сила 114, 116–117

Магнетики 153–163, 180

Магнитная восприимчивость 155, 159

Магнитная проницаемость 159

Магнитный момент 135–137, 234

Магнитный момент
единицы объема 155

Магнитный момент
плоского витка 136

Магнитный момент системы токов 135

Метод изображений 183–188

Метод разделения переменных 188–190

Мировая линия 63

Мощность излучения 219–221, 224,
237, 240

Мультипольное разложение 122–124,
129–130, 133–134, 139–141,
231–234

Мультипольные моменты 124, 124–125

Мультипольные моменты для системы
зарядов с осевой симметрией
132–133

Мультипольные моменты для системы
зарядов со сферической
симметрией 131–132

Мультипольные моменты
неприводимые 125–129

Напряженность поля 157, 251

Оператор *Лапласа* 20

Плоские волны 46, 199–202

Плотность заряда для движущейся
точечной заряженной
частицы 110–111

Плотность заряда объемная 14

Плотность лагранжиана 93

Плотность лагранжиана
взаимодействия поля
с источником 95

Плотность лагранжиана свободного
поля 95

Плотность тока для движущейся
точечной заряженной
частицы 110–111

Плотность тока объемная 15

Плотность энергии 99, 101, 104

Поляризация круговая 34, 201

Поляризация линейная 34, 201

Поляризуемость 154, 155, 158

Потенциал векторный 29

- Потенциал скалярный 29
- Потенциалы запаздывающие 212–213
- Потенциалы *Льенара — Вихерта* 217–218
- Потенциальная энергия системы зарядов в заданном внешнем поле 143–144
- Потенциальная энергия системы зарядов полная 149–151
- Потенциальная энергия системы токов в заданном внешнем поле 145–148
- Потенциальная энергия системы токов полная 151–152
- Поток вектора 21
- Преобразование *Фурье* 204, 206–207
- Преобразования *Галилея* см. Галилея преобразования
- Преобразования дробно-линейные 50
- Преобразования *Лоренца* 49–57
- Преобразования *Лоренца* собственные 57, 57–61
- Принцип относительности 45–46
- Принцип суперпозиции 120
- Псевдотензор 42
- Ротор 20
- Свертка тензора 40
- Световой конус 51
- Связанные источники 155, 157, 250
- Система единиц гауссова 14, 15
- Система отсчета 36
- Система отсчета инерциальная 45
- Скорость света 14, 46–48
- Сложение скоростей 46, 62
- Собственное время 66
- Тензор квадрупольного момента см. Квадрупольный момент
- Тензор квадрупольного момента неприводимый 126, 128, 133
- Тензор метрический 52, 55
- Тензор на группе вращений 38–39
- Тензор на группе *Лоренца* 66–67
- Тензор напряжений (натяжений) 100–101, 104
- Тензор напряженностей (тензор поля) 77, 83, 115–116
- Тензор энергии-импульса 98–99, 101, 103
- Тензорное поле 42–43
- Тензорное поле на группе *Лоренца* 73–74
- Тензорное произведение 40
- Тензоры 35
- Теорема Гаусса см. Поток вектора
- Теорема *Остроградского* — *Гаусса* 21
- Теорема *Стокса* 21
- Ток смещения 15
- Уравнение *Гельмгольца* 254, 256, 258, 265, 270
- Уравнение *Лапласа* 120, 188, 189, 192
- Уравнение непрерывности 28, 119, 251
- Уравнение непрерывности в ковариантной форме 80
- Уравнение *Пуассона* 120–121, 181–183
- Уравнение *Эйлера* 92, 94
- Уравнения баланса энергии 115–116
- Уравнения движения 115–116
- Уравнения *Максвелла* 14
- Уравнения *Максвелла* в дифференциальной форме 14
- Уравнения *Максвелла* в интегральной форме 22
- Уравнения *Максвелла* в ковариантной форме 78, 86
- Уравнения *Максвелла* для диэлектриков 158
- Уравнения *Максвелла* для магнетиков 159
- Уравнения *Максвелла* для потенциалов 30
- Уравнения *Максвелла* нестационарные 198

Уравнения *Максвелла*
нестационарные в среде 250

Фаза волны 200, 202

Формулы свертки 19, 20

Функционал действия 91, 93–95, 100

Функция *Бесселя* 189, 270

Функция *Грина* 203, 206–207

Функция *Грина* волнового оператора
207–209

Функция *Грина* запаздывающая
209–210, 210–212

Функция *Грина* линейной
дифференциальной операций
203–204

Функция *Неймана* 189, 270

Функция состояния 164
Фурье интеграл 202, 227

Циркуляция вектора 21

Четырехмерная скорость 108, 115–116

Четырехмерный импульс 108, 115–116

Четырехмерный ток 79

Эйнштейна теория
относительности 49

Электрический дипольный момент
124, 130

Электродвижущая сила (ЭДС) 23,
145–147

Эфир 15, 47–48